

Viareggio 1988

Problema 1

Alberto e Barbara giocano al seguente gioco: Alberto lancia una moneta n volte, e Barbara lo fa $n + 1$ volte. Il giocatore che ottiene più volte testa vince; o in caso di parità, vince Alberto. Trovare i valori di n per cui il gioco è bilanciato.

SOLUZIONE

Consideriamo la situazione dopo i primi n lanci (ovvero quando manca solo più l'ultimo lancio di Barbara), e distinguiamo due casi a seconda del numero di teste ottenute dai due:

- Alberto e Barbara hanno lo stesso punteggio. Barbara ha ancora un lancio; se esce testa, passa in vantaggio e vince; se esce croce, il punteggio rimane pari e vince Alberto. Dato che testa e croce sono equiprobabili, anche la vittoria di uno è equiprobabile alla vittoria dell'altro.
- Alberto e Barbara hanno un punteggio diverso. Per simmetria la probabilità che Alberto sia in vantaggio è uguale a quella che Barbara sia in vantaggio. Se Barbara è in vantaggio, allora con l'ultimo lancio rimane comunque in vantaggio e dunque vince. Se Alberto è in vantaggio, Barbara con l'ultimo lancio può al massimo pareggiare, nel qual caso vince Alberto.

Dato che in entrambi i casi la probabilità di vittoria di Alberto è uguale a quella di Barbara, il gioco è equo per ogni n .

Problema 2

In un torneo di basket ogni coppia delle n squadre S_1, \dots, S_n gioca esattamente una partita, in cui non è permesso il pareggio. Siano v_i e p_i rispettivamente il numero di vittorie e di sconfitte della squadra S_i . Dimostrare che

$$v_1^2 + \dots + v_n^2 = p_1^2 + \dots + p_n^2$$

SOLUZIONE

Dato che non sono ammessi i pareggi, ogni partita è una vittoria o una sconfitta per la squadra; in totale ogni squadra gioca $n - 1$ partite, una ogni una contro ogni altra squadra, quindi $v_i + p_i = n - 1$ per ogni i . Inoltre in ogni partita una squadra vince e una perde, perciò il numero totale di vittorie è uguale al numero totale di sconfitte ovvero $\sum v_i = \sum p_i$.

Consideriamo ora $S = \sum v_i^2 - \sum p_i^2 = \sum (v_i - p_i)(v_i + p_i)$; ma $v_i + p_i = n - 1$ e possiamo raccoglierlo quindi: $S = (n - 1) \sum v_i - p_i$, che per quanto detto prima vale 0. Allora $S = 0$ e la tesi è dimostrata.

Problema 3

È dato un pentagono regolare di lato 1. Determinare il minimo raggio r per il quale il pentagono può essere coperto da 5 cerchi di raggio r e giustificare la risposta.

SOLUZIONE

La distanza massima tra due punti interni al cerchio è quella tra due punti diametralmente opposti ed è uguale a $2r$. Siano $ABCDE$ i cinque vertici del pentagono e O il suo centro. Calcolo la distanza d tra un vertice e O .

Sia M il punto medio di AB , allora siccome il pentagono è regolare $AO = BO$, quindi $\angle AMO = 90^\circ$; si ha anche $AM = \frac{1}{2}$ e $\angle AOM = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 360 = 36^\circ$. Quindi $AO = \frac{AM}{\sin 36^\circ}$, mi ricavo $\sin 36$ per via trigonometrica.

$$2 \cdot 18 = 90 - 3 \cdot 18 \rightarrow \sin(2 \cdot 18) = \sin(90 - 3 \cdot 18) = \cos(3 \cdot 18)$$

Usando le formule di duplicazione e triplicazione:

$$2 \sin(18) \cos(18) = 4 \cos^3(18) - 3 \cos 18$$

Siccome $\cos 18 \neq 0$ posso dividere e usando $\cos^2 18 = 1 - \sin^2 18$:

$$4 \sin^2(18) + 2 \sin(18) - 1 = 0$$

Da cui si ricava $\sin 18 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ siccome $\sin 18 > 0$. Segue che $\cos 18 = \sqrt{1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ e $\sin 36 = 2 \sin 18 \cos 18 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \approx 0,587785$. Quindi $AO = \frac{AM}{\sin 36} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{8}{5-\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \approx 0,85$.

Se $r < \frac{AO}{2}$, allora la distanza tra due punti all'interno del cerchio è $\leq 2r < AO < 1$, quindi un cerchio non può coprire contemporaneamente due qualsiasi tra i sei punti A, B, C, D, E, O , ma con solo 5 cerchi è impossibile coprire questi 6 punti. Quindi $r \geq \frac{AO}{2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{40}}$.

Ora mostreremo che con $r = \frac{AO}{2}$ è effettivamente possibile ricoprire il pentagono con 5 dischi. Siano $A', B', C', D', E', N, P, Q, R$ i punti medi dei segmenti $AO, BO, CO, DO, EO, BC, CD, DE, EA$ rispettivamente. Una circonferenza centrata in A' di raggio $r = \frac{AO}{2}$ passa per i punti A e O per definizione del raggio, passa anche per M e R siccome $\angle AMO = \angle ARO = 90^\circ$ e AO è diametro. Quindi la circonferenza ricopre tutta la parte interna del quadrilatero $AMOR$; costruendo in modo analogo le altre quattro circonferenze, si vede che i quadrilateri $AMOR, BNOM, CPON, DQOP, EROP$ uniti formano il pentagono $ABCDE$ ed ognuno di essi è completamente ricoperto da una circonferenza.

Il raggio minimo è quindi $r = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{40}}$.

Problema 4

Dimostrare che tutti i termini della sequenza $1_9, 11_9, 111_9, \dots$ (una stringa di soli 1 in base 9) sono numeri triangolari, ovvero della forma $\frac{m(m+1)}{2}$ per un qualche m intero.

SOLUZIONE

Chiamiamo x_n il numero composto da n cifre 1; notiamo che $8 \cdot x_n = 88 \dots 8_9$ e quindi $8x_n + 1 = 10 \dots 0_9$ con n zeri. Quindi

$$8x_n + 1 = 9^n$$

che si riscrive come $x_n = \frac{9^n - 1}{8}$; in alternativa $x_n = \sum_{i=0}^{n-1} 9^i = \frac{9^{n-1+1} - 1}{9 - 1}$. Ora, $9 = 3^2$, quindi $9^n - 1 = (3^n - 1)(3^n + 1)$; abbiamo dunque infine

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^n - 1}{2} \cdot \frac{3^n + 1}{2}$$

e dato che $\frac{3^n+1}{2} = \frac{3^n-1}{2} + 1$, allora x_n è proprio un triangolare.

Problema 5

Dati quattro punti non complanari, è sempre possibile trovare un piano tale che le proiezioni ortogonali di questi quattro punti sul piano siano i vertici di un parallelogramma? In generale, quanti piani del genere esistono?

SOLUZIONE

Siano A, B, C, D i quattro punti. Li suddividiamo in due coppie da due elementi ciascuno, per esempio A, B e C, D . Una condizione sufficiente è che le due proiezioni dei segmenti AB e CD sul piano siano di uguale lunghezza e parallele tra di loro: in questo modo i quattro vertici formeranno un parallelogramma. Ora, sia D' un punto tale che $CD \parallel AD'$ e $CD = AD'$ (ovvero il punto in cui va D dopo aver traslato C in A). Sia M il punto medio di BD' ; allora $MB = MD'$ e $AM \perp BD'$.

Prendo il piano γ perpendicolare alla retta AM e passante per M (di conseguenza anche per B e D'): su di esso, la proiezione del segmento AB è BM , mentre la proiezione di AD' è MD' . Siccome $CD = AD'$ e $CD \parallel AD'$ la proiezione di CD su γ (la chiamo EF) è uguale e parallela alla proiezione di AD' sul piano, ovvero MD' . Siccome $MB = MD' = EF$ e $MB \parallel MD' \parallel EF$, segue che le due proiezioni MB e EF sono uguali e parallele, quindi $MBEF$ è un parallelogramma (con i vertici non necessariamente presi in quest'ordine).

Esistono altri infiniti piani che soddisfano questa condizione: proiettando A, B, C, D su un qualsiasi piano parallelo a γ , si crea un quadrilatero $M'B'E'F'$; siccome $M'A, BB', E'C, F'D$ sono quattro rette parallele tra di loro e perpendicolari a γ e al secondo piano, devono passare anche per il quadrilatero $MBEF$. I due quadrilateri $MBEF$ e $M'B'E'F'$ sono uguali, quindi anche il secondo è un parallelogramma.

Problema 6

Le lunghezze dei lati della base di un tetraedro sono a, b, c e le lunghezze dei tre lati laterali x, y, z . Se d è la distanza del vertice del tetraedro dal baricentro del triangolo di base, dimostrare che $x + y + z \leq a + b + c + 3d$

SOLUZIONE

Siano A, B, C i tre vertici opposti ai lati di lunghezza a, b, c nella base, D il vertice in alto e G il baricentro di ABC . Per la disuguaglianza triangolare applicata al triangolo GDA , si ha $GD + AG > AD$; analogamente per i triangoli GDB e GDC si ha $GD + BG > BD$ e $GD + CG > CD$. Sommando tutte e tre si ha $x + y + z = AD + BD + CD < AG + GD + BG + GD + CG + GD = AG + BG + CG + 3d$. Per dimostrare la tesi basta dimostrare che $a + b + c + 3d > AG + BG + CG + 3d$, ovvero $a + b + c > AG + BG + CG$. Se J, K, L sono i punti medi dei lati BC, AC, AB rispettivamente, allora $AG = \frac{2}{3}AJ$, $BG = \frac{2}{3}BK$ e $CG = \frac{2}{3}CL$ (poiché il baricentro divide la mediana in due parti in rapporto 2 : 1); la tesi diventa $3(AB + BC + CA) > 2(AJ + BJ + CJ)$. Per la disuguaglianza triangolare applicata ai triangoli AJB e AJC , si ha $AJ < AB + JB = AB + \frac{BC}{2}$ e $AJ < AC + JC = AC + \frac{BC}{2}$, da cui sommando si ha $2AJ < AB + BC + CA$. In modo analogo si ottiene $2BJ < AB + BC + CA$ e $2CJ < AB + BC + CA$. Sommandole tutte e tre assieme si ha la tesi $3(AB + BC + CA) > 2(AJ + BJ + CJ)$.

Problema 7

Dati $n \geq 3$ interi non più grandi di 100 il cui massimo comun divisore è d , dimostrare che ne esistono 3 il cui massimo comun divisore è esattamente d .

SOLUZIONE

Siano $100 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 1$ gli interi del testo, con \gcd pari a d ; consideriamo gli interi $b_i = \frac{a_i}{d}$ per ogni i . L'ipotesi è che $\gcd(b_1, \dots, b_n) = 1$ e la tesi è che esistano tre indici i, j, k tali che $\gcd(b_i, b_j, b_k) = 1$.

Dimostriamo per induzione che per ogni $n \geq k \geq 3$ esiste una k -upla di b_i con $\gcd = 1$.

Data una k -upla c_1, \dots, c_k di b_i con $\gcd(c_1, \dots, c_k) = 1$ per ipotesi induttiva, sia $d_i = \gcd(c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_k)$ il massimo comun divisore della $k - 1$ -upla in cui manca c_i e $P = \prod d_i$.

Se fosse $\gcd(d_i, d_j) > 1$ per una qualche coppia di indici distinti, allora avremmo un divisore di tutti i c_i , impossibile.

Quindi i d_i sono a coppie coprimi; ma fissato un indice i abbiamo $d_k \mid c_i$ per ogni $k \neq i$, e dato che sono coprimi a coppie abbiamo che $\frac{P}{d_i} \mid c_i$, e in particolare $c_i \geq \frac{P}{d_i}$. Consideriamo ora il più piccolo d_M ; se è uguale a 1, allora abbiamo trovato la $k - 1$ -upla che ci interessava, se no è almeno 2; ma allora gli altri d_j sono almeno pari a 3, 5, 7, ... perché sono coprimi a coppie. Ora, dato che $k \geq 4$, abbiamo $c_M \geq 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \geq 105$; ma c_M era uno degli interi minori di 100, diviso per $d \geq 1$, e quindi è assurdo aver supposto $d_i > 1$ per tutti gli indici.

Allora per ogni $k \geq 4$ troviamo una $k - 1$ -upla con $\gcd = 1$ partendo da una k -upla con $\gcd = 1$.