# Algebra – Sessioni dello stage

A4. Dimostrare che per tutte le terne positive $a, b, c$ che soddisfano $abc = 1$, si ha,

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a(a+1) + ab(ab+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

A5. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(xf(y)) + y + f(x) = f(x + f(y)) + yf(x).$$

A6. Dimostrare che per ogni scelta di $a, b, c, d$ non negativi si ha

$$(ab)^{\frac{1}{3}} + (cd)^{\frac{1}{3}} \leq [(a+c+b)(a+c+d)]^{\frac{1}{3}}.$$

# Combinatoria – Sessioni dello stage

C4. In ogni casella di una scacchiera $2014 \times 2014$ è seduta una persona che è o un cavaliere o un furfante.
Come è noto i cavalieri affermano sempre il vero, mentre i furfanti mentono sempre.
Ogni persona viene interrogata e dichiara la seguente frase: "I furfanti presenti nella mia riga sono tanti quanti i furfanti presenti nella mia colonna".
Determinare il minimo numero possibile di cavalieri presenti nella scacchiera.

C5. Sono date $2n$ pedine in fila. Una mossa consiste nello scambiare 2 pedine adiacenti. L'obiettivo è dare una successione di $K$ mosse che permetta ad ogni pedina di trovarsi almeno una volta a capo e almeno una volta a coda della fila. Quanto vale $K$ al minimo, per raggiungere l'obiettivo?

C6. Determinare il massimo intero $r$ tale che comunque siano dati 5 sottoinsiemi $A_1, \ldots, A_5$ di $\{1, \ldots, 1000\}$ ciascuno contenente 500 elementi, esistano necessariamente due indici $i, j$ distinti tali che $|A_i \cap A_j| \geq r$.

# **Geometria** – Sessioni dello stage

4. I quadrati $CAKL$ e $CBMN$ sono costruiti sui lati di un triangolo acutangolo $ABC$, all'esterno del triangolo. La retta $CN$ interseca il segmento $AK$ in $X$; la retta $CL$ interseca il segmento $BM$ in $Y$. Il punto $P$, interno al triangolo $ABC$, è una intersezione delle circonferenze circoscritte ai triangoli $KXN$ e $LYM$. Il punto $S$ è il punto medio di $AB$. Il punto $Q$ è l'intersezione delle rette $KL$ e $MN$.

   (a) Dimostrare che $P$, $C$ e $Q$ sono allineati.

   (b) Dimostrare che $\angle ACS = \angle BCP$.

5. Sia $ABC$ un triangolo, e sia $D$ un punto sul lato $BC$. Il circocerchio di $ABD$ interseca $AC$ in $F$ (diverso da $A$), e il circocerchio di $ACD$ interseca $AB$ in $E$ (diverso da $A$).

   Dimostrare che, al variare di $D$, il circocerchio di $AEF$ passa sempre per un punto fisso diverso da $A$, e che tale punto si trova sulla mediana di $ABC$ uscente da $A$.

6. Sia $ABC$ un triangolo con incentro $I$. Sia $\omega$ il suo incerchio. Sia $\Gamma$ la circonferenza circoscritta al triangolo $BIC$. Le circonferenze $\omega$ e $\Gamma$ si intersecano nei punti $X$ e $Y$. Siano $Z$ e $Z'$ i due centri di similitudine delle circonferenze $\omega$ e $\Gamma$.

   (a) Dimostrare che $XZYZ'$ è ciclico.

   (b) Dimostrare che la sua circonferenza circoscritta a $XZYZ'$ è tangente al circocerchio di $ABC$.

# Geometria – Sessioni dello stage

7. Sia $ABC$ un triangolo con circocerchio $\Gamma$. Siano $M$, $N$ i punti medi degli archi $AB$, $AC$ che non contengono $C$, $B$. Siano $M'$, $N'$ i punti di tangenza dell'incerchio di $ABC$ con $AB$, $AC$. Supponiamo che $X$, $Y$ siano i piedi delle perpendicolari da $A$ a $MM'$, $NN'$. Sia infine $I$ l'incentro di $ABC$.

   Dimostrare che il quadrilatero $AXIY$ è ciclico se e solo se $b + c = 2a$.

8. Sia $ABC$ un triangolo, $H$ il suo ortocentro e $K$ il suo punto di Lemoine. Indichiamo inoltre con $K'$ il punto di Lemoine del triangolo ortico di $ABC$.

   Dimostrare che $H$, $K$ e $K'$ sono allineati.

   (NOTA: si ricorda che il triangolo ortico di $XYZ$ è il triangolo che ha come vertici i piedi delle altezze di $XYZ$, e che il punto di Lemoine di $XYZ$ è il punto di concorrenza delle simmediane di $XYZ$.)

9. Sia $ABCDEF$ un esagono convesso con $AB = DE$, $BC = EF$ e $CD = FA$. Supponiamo inoltre che $\angle A - \angle D = \angle C - \angle F = \angle E - \angle B$.

   Dimostrare che le diagonali $AD$, $BE$ e $CF$ sono concorrenti.

# Teoria dei numeri – Sessioni dello stage

N4. Determinare tutti gli interi positivi $k$ tali che il prodotto dei primi $k$ numeri primi dispari è della forma $a^b + 1$ con $a \geq 1$ e $b \geq 2$.

N5. Siano $a, b$ due interi relativamente primi, e definiamo le successioni di interi $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ mediante la formula

$$(a + b\sqrt{2})^{2n} = a_n + b_n\sqrt{2}.$$

Determinare l'insieme dei numeri primi $p$ per i quali esiste un intero positivo $n \leq p$ tale che $p | b_n$.

N6. Determinare tutte le coppie di interi positivi $(m, n)$ tali che $m^6 = n^{n+1} + n - 1$.

N7. Determinare tutti gli interi positivi $n$ per i quali ogni coefficiente del polinomio

$$P_n(x) = (x^2 + x + 1)^n - (x^2 + x)^n - (x^2 + 1)^n - (x + 1)^n + x^{2n} + x^n + 1$$

è divisibile per 7.

# Miscellanea – Problemi di ammissione

M1. Sia $n \geq 2$ un numero intero, e siano $a_1, \ldots, a_{n-1}$ numeri reali qualunque. Siano $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ e $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ due $(n+1)$-uple tali che

- $u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = 1$,
- $u_{k+1} = u_k + a_k u_{k-1}$ per ogni $k = 1, \ldots, n-1$,
- $v_{k+1} = v_k + a_{n-k} v_{k-1}$ per ogni $k = 1, \ldots, n-1$.

Dimostrare che $u_n = v_n$.

M2. Dimostrare che, per ogni intero positivo $n$, il polinomio

$$p(x) = (x^2 - 8x + 25)(x^2 - 16x + 100) \cdot \ldots \cdot (x^2 - 8nx + 25n^2) + 1$$

è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

M3. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x+y) + y \leq f(f(f(x)))$$

per ogni coppia di numeri reali $x$ e $y$.