Algebra – Problemi di ammissione

A1. Determinare tutti i polinomi $p(x)$ per i quali esiste una costante reale a tale che valga l'identità seguente

$$p(x + x^2 + x^4) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)\, p(ax).$$

A2. Sia f una funzione da $\mathbb{Z}$ in sé tale che per ogni coppia di interi x, y si abbia

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x))$$

Dimostrare che f è limitata.

A3. Dato $n \geq 3$, siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numeri reali tali che

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n \qquad \text{e} \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq n^2$$

Dimostrare che $\max(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 2$.