Geometria – Problemi di ammissione

1. Sia $ABCDEF$ un esagono convesso. Siano $P = AB \cap CD$, $Q = CD \cap EF$, $R = EF \cap AB$, $S = BC \cap DE$, $T = DE \cap FA$, $U = FA \cap BC$.

   Dimostrare che

   $$\frac{PQ}{CD} = \frac{QR}{EF} = \frac{RP}{AB} \quad \text{se e solo se} \quad \frac{ST}{DE} = \frac{TU}{FA} = \frac{US}{BC}.$$

2. Sia ABC un triangolo acutangolo. Sia D un punto arbitrario sul segmento AB. Siano M e N i piedi delle perpendicolari da D a BC e AC, rispettivamente. Siano H_1 e H_2 gli ortocentri dei triangoli MNC e MND, rispettivamente.

   Dimostrare che l'area del quadrilatero AH_1BH_2 non dipende dalla posizione di D su AB.

3. Sia ABC un triangolo, A', B', C' i punti di tangenza della circonferenza inscritta su BC, CA, AB; tracciamo AA' che interseca la circonferenza inscritta nuovamente in Q e il segmento $B'C'$ in L. Chiamiamo M il punto medio di $B'C'$, T l'intersezione di BC e $B'C'$, P la proiezione di L su AT. Dimostrare che $A'MQP$ ciclico.