Oliforum contest -3rd edition

Paolo Leonetti

October 23, 2012

Proposition 1. *Mostrare che esistono infiniti interi positivi* n *tali che* n^2 *divide* $2^n + 3^n$.

Proposition 2. *Mostrare che per ogni polinomio* $f(x)$ *a coefficienti interi, esiste* C *intero tale che l'insieme*

$$\{n \in \mathbb{Z} \ : \ \textit{la somma delle cifre di } f(n) \textit{ e' } C\}$$

non e' finito.

Nota*: Per definizione* $s(x) = s(-x)$ *per ogni intero* x *e* $s(0) := 0$.

Proposition 3. *Mostrare che se un esagono equiangolo ha (in ordine) lati* a, b, c, d, e, f *allora* $a - d = e - b = c - f$.

Proposition 4. *Mostrare che se* $a \geq b \geq c \geq 0$ *allora*

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geq 0$$

Proposition 5. *Sia* $ABCD$ *un quadrilatero ciclico. Definiamo* $X = AB \cap CD$ *e* $Y = AD \cap BC$ *e supponiamo che esista una circonferenza di centro* Z *inscritta in* $ABCD$. *Mostrare che allora la circonferenza di diametro* XY *passa per* Z *ed e' ortogonale alla circonferenza circoscritta ad* $ABCD$.

Proposition 6. *Ogni intero viene colorato con uno di* 4 *colori disponibili, e fissiamo* m, n *interi dispari distinti tali che* $m + n \neq 0$. *Mostrare che esistono interi* a, b *dello stesso colore tali che* $a - b$ *ha lo stesso colore di almeno uno tra* $m, n, m - n, m + n$.