

Lunedì 18 Luglio 2011

Problema 1. Per ogni insieme $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ di quattro interi positivi distinti, sia s_A la somma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, e sia n_A il numero delle coppie di indici (i, j) , con $1 \leq i < j \leq 4$, tali che $a_i + a_j$ divide s_A .

Tra tutti gli insiemi di quattro interi positivi distinti, determinare gli insiemi A per cui n_A è il più grande possibile.

Problema 2. Sia \mathcal{S} un insieme finito di punti del piano, contenente almeno due punti. Assumiamo che i punti di \mathcal{S} siano a tre a tre non allineati.

Chiamiamo *mulino a vento* il seguente processo.

Il processo inizia con una retta ℓ passante per un unico punto $P \in \mathcal{S}$. La retta ruota in senso orario intorno al *pivot* P fino a che non incontra per la prima volta un altro punto di \mathcal{S} . Questo punto, Q , diventa il nuovo pivot, e la retta ora ruota in senso orario intorno a Q , fino a quando incontra un'altra volta un punto di \mathcal{S} . Questo processo continua all'infinito.

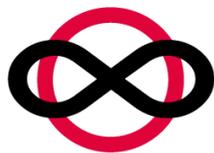
Dimostrare che si possono scegliere un punto P di \mathcal{S} ed una retta ℓ passante per P tali che il risultante mulino a vento utilizza ogni punto di \mathcal{S} come pivot infinite volte.

Problema 3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

per tutti i numeri reali x e y .

Dimostrare che $f(x) = 0$ per ogni $x \leq 0$.



Martedì 19 Luglio 2011

Problema 4. Sia $n > 0$ un numero intero. Si dispone di una bilancia a due piatti e di n pesi i cui pesi sono $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$.

Si devono piazzare tutti gli n pesi sulla bilancia, l'uno dopo l'altro, in maniera tale che il piatto destro non contenga mai un peso complessivo maggiore del piatto sinistro. A tal fine, ad ogni passo si sceglie uno dei pesi che non è stato ancora piazzato sulla bilancia e lo si aggiunge o sul piatto sinistro o sul piatto destro, fino a quando non sono stati piazzati tutti i pesi.

Determinare il numero dei modi in cui questo si può fare.

Problema 5. Sia \mathbb{Z} l'insieme degli interi, sia \mathbb{N}^* l'insieme degli interi positivi, e sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}^*$.

Supponiamo che, comunque si scelgano due interi m ed n , la differenza $f(m) - f(n)$ sia divisibile per $f(m - n)$.

Dimostrare che per tutti gli interi m, n con $f(m) \leq f(n)$ il numero $f(n)$ è divisibile per $f(m)$.

Problema 6. Sia ABC un triangolo acutangolo, e sia Γ la sua circonferenza circoscritta. Sia ℓ una retta tangente a Γ . Siano ℓ_a, ℓ_b ed ℓ_c le rette ottenute facendo la simmetria di ℓ rispetto alle rette BC, CA ed AB , rispettivamente.

Dimostrare che la circonferenza circoscritta al triangolo determinato dalle rette ℓ_a, ℓ_b ed ℓ_c è tangente alla circonferenza Γ .