1. È dato un trapezio con le basi lunghe 1 e 4, rispettivamente. Lo suddividiamo in due trapezi mediante un taglio parallelo alle basi, lungo 3. Vogliamo ora suddividere i due nuovi trapezi, sempre mediante tagli paralleli alle basi, in m ed n trapezi, rispettivamente, in modo che tutti gli $m+n$ trapezi ottenuti abbiano la stessa area. Determinare il minimo valore possibile per $m+n$ e le lunghezze dei tagli da effettuare per realizzare tale minimo valore.

Soluzione: Sia $ABCD$ il trapezio, con AB base maggiore, e siano P e Q gli estremi del taglio già effettuato, posti rispettivamente su AD e BC. Si prolunghino i lati obliqui fino a farli incontrare in un punto che chiamiamo E; i triangoli DCE, PQE, ABE sono simili (hanno tutti gli angoli congruenti grazie al parallelismo delle rette DC, PQ, AB). Sappiamo che $PQ/DC = 3$ e $AB/DC = 4$, da cui, detta S la misura dell'area del triangolo DCE, si ottengono i rapporti di aree: $Area(PQE)/S = 3^2 = 9$, $Area(ABE)/S = 4^2 = 16$.

Ne deriva che, per differenza, $Area(PQCD) = 8S$ e $Area(ABQP) = 7S$. Supponiamo di dividere in m parti il trapezio $PQCD$, in n parti il trapezio $ABPQ$; affinché le parti abbiano tutte area uguale, dovrà risultare $8S/m = 7S/n$, ovvero $8n = 7m$, e dunque m dev'essere multiplo di 8 ed n multiplo di 7. Come minimo $m+n$ dovrà valere $7+8 = 15$.

Per suddividere il trapezio iniziale in 15 parti dobbiamo realizzare 14 tagli (contando anche quello di lunghezza 3 effettuato all'inizio); chiamiamo P_i e Q_i (rispettivamente su AD e BC) gli estremi dell'i-esimo taglio (in ordine di lunghezza: in questo modo P coinciderà con P_8 e Q con Q_8). L'area del trapezio P_iQ_iCD vale i volte l'area di una singola parte, che è uguale ad S, da cui $Area(P_iQ_iE) = (i+1)S$. Come prima, i triangoli P_iQ_iE e DCE sono simili; il rapporto fra lati corrispondenti vale quanto la radice quadrata del rapporto fra le aree (che è $i+1$); dunque $P_iQ_i = \sqrt{i+1}$. In conclusione, i tagli sono lunghi $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{15}$, e consentono di suddividere il trapezio iniziale in esattamente 15 parti.

2. Una sequenza di interi positivi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ è detta *scaletta* di lunghezza n se è composta da n numeri consecutivi, in ordine crescente.

(a) Dimostrare che per ogni intero positivo n esistono due scalette di lunghezza n, senza elementi in comune, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$, tali che per ogni i tra 1 ed n il massimo comune divisore fra a_i e b_i è uguale a 1.

(b) Dimostrare che per ogni intero positivo n esistono due scalette di lunghezza n, senza elementi in comune, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$, tali che per ogni i tra 1 ed n il massimo comune divisore fra a_i e b_i è maggiore di 1.

Soluzione: (a) Fissiamo n numeri consecutivi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Sia ora d un numero più grande di n che non abbia fattori comuni con nessuno tra $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (ad esempio, un numero primo più grande di a_n), poniamo $b_1 = a_1 + d, b_2 = a_2 + d, \ldots, b_n = a_n + d$; allora $a_1, a_2, \ldots a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sono due scalette di lunghezza n disgiunte fra loro e tali che, per ogni i tra 1 ed n, il massimo comune divisore fra a_i e b_i è uguale a 1: infatti, se esistesse un fattore comune di a_i e b_i, questo sarebbe un fattore anche di $b_i - a_i = d$, e questo è impossibile, perché d e a_i non hanno fattori in comune.

(b) Analogamente a prima fissiamo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ consecutivi, con $a_1 > 1$; prendiamo poi un intero $d > n$ che abbia fattori in comune con ognuno degli elementi $a_1, \ldots, a_n$ (ad esempio, il prodotto $a_1 a_2 \cdots a_n$), e fissiamo $b_1 = a_1 + d, b_2 = a_2 + d, \ldots, b_n = a_n + d$. Anocra una volta le scalette $a_1, a_2, \ldots a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sono disgiunte fra loro, ma in questo caso a_i e b_i hanno sempre un fattore in comune: infatti a_i e d hanno sempre un fattore in comune, e quindi lo stesso è vero per a_i e $d + a_i = b_i$.

3. Su una lavagna sono scritti dei numeri interi, compresi fra 1 e 7. È possibile che non tutti i numeri da 1 a 7 siano presenti, ed è anche possibile che uno, alcuni o tutti i numeri siano ripetuti, una o più volte.

Una mossa consiste nello scegliere uno o più numeri presenti sulla lavagna, purché tutti diversi, cancellarli, e scrivere al loro posto i numeri che, unitamente a quelli cancellati, formano l'intero insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Ad esempio, mosse consentite sono:

- cancellare un 4 ed un 5, e scrivere al loro posto i numeri 1, 2, 3, 6 e 7;
- cancellare un 1, un 2, un 3, un 4, un 5, un 6 ed un 7 senza scrivere niente al loro posto.

Dimostrare che, se è possibile trovare una sequenza di mosse che, partendo dalla situazione iniziale, porti ad avere sulla lavagna un unico numero (scritto **una sola volta**), allora questo numero non dipende dalla sequenza di mosse utilizzata.

Soluzione: Chiamiamo n_1 il numero di cifre 1 presenti in un certo momento sulla lavagna, n_2 il numero di cifre 2, e così via fino ad n_7.

Ogni volta che si fa una mossa, ognuna di queste molteplicità cambia di 1 (e quindi inverte la sua parità), perché ogni numero tra 1 e 7 viene scritto o cancellato. Supponiamo che dopo una sequenza di k mosse rimanga sulla lavagna un unico numero, diciamo x; n_x ha cambiato parità k volte ed è infine dispari; tutte le altre molteplicità, cambiando parità anch'esse k volte, risultano infine uguali a zero, quindi pari.

Anche nella situazione iniziale, perciò, n_x deve avere parità diversa da ogni altra molteplicità. Non esiste quindi alcuna sequenza di mosse che porti ad avere sulla lavagna un'unica copia di un numero y diverso da x: n_y dovrebbe partire con parità diversa da tutte le altre molteplicità, ma abbiamo già stabilito che ha la stessa parità di n_z per tutti i numeri z diversi da x.

4. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso. Sia P l'intersezione delle bisettrici esterne di $\widehat{DAC}$ e $\widehat{DBC}$.

Dimostrare che $\widehat{APD} = \widehat{BPC}$ se e solo se $AD + AC = BC + BD$.

[**Nota** : Si ricorda che la bisettrice esterna ad un angolo è la retta passante per il vertice dell'angolo e perpendicolare alla bisettrice interna (cioè l'usuale bisettrice) dell'angolo stesso.]

Soluzione: Chiamiamo r ed s rispettivamente le bisettrici esterne di $\widehat{DAC}$ e $\widehat{DBC}$. Si costruiscano i punti C' e D' rispettivamente come simmetrico di C rispetto a s e come simmetrico di D rispetto a r. Poiché r è bisettrice esterna si ha che C', B e D sono allineati e in più per costruzione $C'B = CB$; quindi $C'D = C'B + BD = BC + BD$. Allo stesso modo $D'C = AD + AC$. Chiamiamo ora $\beta = \widehat{BPC}$ che è uguale per costruzione a $\widehat{BPC'}$ e nello stesso modo $\alpha = \widehat{APD} = \widehat{APD'}$. Chiamiamo infine $\gamma = \widehat{CPD}$.

Consideriamo ora i triangoli $C'PD$ e CPD'. Abbiamo per costruzione $PD' = PD$ e $PC' = PC$; pertanto i due triangoli sono uguali se e solo se i due angoli in P sono uguali o, equivalentemente, se e solo se il terzo lato è uguale. Ma la prima condizione dice che $\widehat{C'PD} = 2\beta + \gamma = 2\alpha + \gamma = \widehat{CPD'}$, che equivale ad $\alpha = \beta$, mentre la seconda condizione dice che $CD' = CD'$ che, per quanto dimostrato sopra, equivale a $AD + AC = BC + BD$.

5. Determinare tutte le soluzioni (p, n) dell'equazione

$$n^3 = p^2 - p - 1$$

dove p è un numero primo e n è un numero intero.

Soluzione: Le soluzioni dell'equazione sono $(p, n) = (2, 1)$ e $(p, n) = (37, 11)$.

Riscriviamo l'equazione nella forma

$$p(p - 1) = (n + 1)(n^2 - n + 1).$$

Osserviamo innanzitutto che per ogni intero n il valore di $n^2 - n + 1$ è positivo, quindi tutti i fattori dell'equazione scritta devono essere positivi, Abbiamo due casi.

Primo caso: $p \mid n + 1$.

Per qualche intero positivo m abbiamo $n + 1 = mp$ e $p - 1 = m(n^2 - n + 1)$. Ma allora $n^2 - n + 1 \leq p - 1 < p \leq n + 1$, quindi $n = 1$ e $p = 2$. Sostituendo nell'equazione iniziale, si verifica che in effetti $(2, 1)$ è una soluzione.

Secondo caso : $p \mid n^2 - n + 1$. Per qualche intero positivo m abbiamo $n^2 - n + 1 = mp$ e $p - 1 = m(n + 1)$. Sostituendo il valore di p dato dalla seconda equazione nella prima equazione, otteniamo

$$n^2 - (m^2 + 1)n - (m^2 + m - 1) = 0.$$

Quest'ultima equazione ha soluzioni intere se e solo se il suo discriminante

$$\Delta = m^4 + 6m^2 + 4m - 3 = (m^2 + 3)^2 + (4m - 12)$$

è il quadrato di un numero intero. Questo è certamente vero se $4m - 12 = 0$, ossia se $m = 3$. Sostituendo questo valore, otteniamo $n = 11$ e $p = 37$, soluzione dell'equazione iniziale ($n = -1$ non dà soluzioni accettabili).

D'altra parte, non ci sono altri valori di m per cui Δ è un quadrato perfetto. Infatti, è immediato vedere che se $m > 3$ si ha $(m^2 + 3)^2 < \Delta < (m^2 + 4)^2$; nei casi rimanenti, si ha per sostituzione diretta che se $m = 1$ allora $\Delta = 8$ e se $m = 2$ allora $\Delta = 21$.

Quindi le soluzioni dell'equazione sono $(p, n) = (2, 1)$ e $(p, n) = (37, 11)$.

6. Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Vogliamo colorare tutti i sottoinsiemi di 3 elementi di X con k colori, in modo tale che, comunque si scelgano due sottoinsiemi disgiunti, questi abbiano colori distinti.

Dimostrare che:

(a) 4 colori sono sufficienti;

(b) 3 colori non sono sufficienti.

SOLUZIONE: (a) Usiamo i colori 1, 2, 3, 4. Per ogni sottoinsieme A di X sia m_A il massimo dei suoi elementi. Assegniamo al sottoinsieme A il colore

$$\max\{1, m_A - 4\}.$$

Se due sottoinsiemi A e B sono disgiunti, allora almeno uno fra m_A ed m_B è maggiore o uguale a 6, quindi due sottoinsiemi disgiunti non possono avere entrambi il colore 1. D'altra parte, se due sottoinsiemi A e B hanno entrambi un colore $r > 1$, allora $m_A = m_B$, quindi A e B non sono disgiunti.

(b) Numeriamo i vertici di un cubo con i numeri naturali $1, 2, \ldots, 8$. e ad ogni sottoinsieme di tre elementi $\{a, b, c\}$ facciamo corrispondere il baricentro del triangolo con vertici $\{a, b, c\}$. D'ora in poi useremo questa corrispondenza per indicare punti del cubo invece che sottoinsiemi di 3 elementi.

Dimostreremo ora che 3 colori non sono sufficienti per colorare tutti i punti. Consideriamo dapprima solo i punti che appartengono alle facce del cubo. Innanzitutto, è chiaro che i sottoinsiemi corrispondenti a punti su facce opposte sono disgiunti, quindi tutti i punti su una faccia devono avere colore diverso da tutti i punti sulla faccia opposta. Supponiamo ora, per assurdo, che per colorare tutti i punti (e quindi, in particolare, tutti i punti che giacciono sulle facce del cubo) siano sufficienti 3 colori. Allora, data una qualunque coppia di facce opposte, i punti di almeno una di esse avranno lo stesso colore (se ci fossero almeno 2 colori su una faccia ed almeno 2 nella faccia opposta, ci vorrebbero 4 colori). Vi sono allora almeno 3 facce del cubo F_1, F_2, F_3, a due a due non parallele, "monocromatiche". Siccome sono a due a due non parallele, due qualsiasi di queste facce si intersecano in uno spigolo, e tutte e tre si intersecano in un vertice. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che il loro vertici siano rispettivamente $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, e, f\}$, $\{a, c, e, g\}$.

I colori di queste tre facce devono essere diversi, in quanto, per esempio, il punto della prima faccia corrispondente ad $\{a, c, d\}$ deve avere colore diverso dal punto della seconda faccia corrispondente a $\{b, e, f\}$ (e analogamente per le altre coppie di facce).

Consideriamo ora l'antipodo h del vertice a. Il baricentro del triangolo con vertici $\{f, g, h\}$ deve avere colore diverso dai baricentri dei triangoli $\{a, b, c\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, c, e\}$ giacenti rispettivamente sulle facce $F_1 . F_2, F_3$, e quindi è necessario un quarto colore, e questo dà una contraddizione.

SOLUZIONE ALTERNATIVA DI (b): Immaginiamo di aver colorato i sottoinsiemi di 3 elementi di X con tre soli colori. Consideriamo un qualunque sottoinsieme Y di X composto di quattro elementi, e chiamiamo $Y^{(3)}$ la famiglia formata da tutti i sottoinsiemi di tre

elementi di Y; diremo che $Y^{(3)}$ è monocromatica se tutti gli insiemi che contiene hanno lo stesso colore; che è 2-colorata se vi compaiono esattamente 2 colori; 3-colorata se vi compaiono tutti e tre i colori.
Osserviamo che, qualunque sia Y, $Y^{(3)}$ non può essere 3-colorata, perché una qualsiasi terna in $(X \setminus Y)^{(3)}$ (dove $X \setminus Y$ è l'insieme dei 4 elementi di X che non appartengono a Y) è disgiunta da tutte quelle in $Y^{(3)}$, e dunque dovrebbe essere colorata di un quarto colore. Allo stesso modo si osserva che, se $Y^{(3)}$ è 2-colorata, allora $(X \setminus Y)^{(3)}$ è monocromatica del colore che manca in $Y^{(3)}$.
Ne deriva che il numero di quaterne Y per cui $Y^{(3)}$ è monocromatica è almeno metà del numero di sottoinsiemi di 4 elementi di X; in particolare, è maggiore o uguale a $\binom{8}{4}/2$, ovvero a 35. Per il principio dei cassetti, dato che abbiamo a disposizione solamente 3 colori, vi sono 35/3 (e dunque 12) quaterne $Y_1 \dots Y_{12}$ tali che le famiglie $Y_i^{(3)}$ (i compreso fra 1 e 12) siano monocromatiche, tutte per il medesimo colore.
È facile rendersi conto che ciò contraddice le ipotesi sulla colorazione. L'intersezione fra Y_i e Y_j (i e j distinti fra 1 e 12) deve contenere almeno tre elementi: se così non fosse esisterebbero due terne disgiunte, una in $Y_i^{(3)}$ e l'altra in $Y_j^{(3)}$, cui avremmo dovuto assegnare colori diversi. Siano $Y_1 = \{a, b, c, d\}$, $Y_2 = \{a, b, c, e\}$; abbiamo solamente due casi possibili per le quaterne Y_i con i fra 3 e 12: che Y_i contenga esattamente due elementi di $\{a, b, c\}$, e sia d che e (il che dà luogo ad al più 3 quaterne distinte); che Y_i contenga $\{a, b, c\}$ e un altro elemento di X distinto sia da d che da e (il che dà luogo ad al più altre 4 quaterne distinte). Ne deriva che non possiamo avere 12 quaterne diverse che differiscano per al più un elemento l'una dall'altra, e quindi che 3 colori non sono sufficienti.

Altra soluzione:

Cominciamo con l'osservare che quattro colori siano sufficienti per la colorazione. Per fare questo, basta colorare di Arancione tutte le terne che contengono l'1, di Bianco tutte le terne che non contengono l'1 ma contengono il 2, di Celeste le terne che non contengono né l'1 né il 2 ma contengono il 3, e di Verde tutte le altre. E' chiaro che non ci possono essere due terne disgiunte entrambe colorate di Arancione, o di Bianco, o di Celeste. Per quanto riguarda il Verde, basta osservare che sono colorate di Verde tutte e sole le terne fatte solo con elementi di {4, 5, 6, 7, 8}, ed è chiaro che due tali terne hanno sempre almeno un elemento in comune.

Facciamo adesso vedere che tre colori (diciamo, Arancione, Bianco e Celeste) non possono bastare. Supponiamo dunque di avere una colorazione lecita con tre colori e cerchiamo di trovare un assurdo. Per brevità, scriveremo 123=A, oppure 367=B per indicare che la terna {1, 2, 3} è colorata di Arancione, o che la {3, 6, 7} è colorata di Bianco, e così via.

Step 1: Osserviamo che ci devono essere due terne con due elementi in comune e colore diverso.

Se infatti ogni volta che due terne hanno due elementi in comune devono avere lo stesso colore, allora si avrebbe 123=124=145=456, ma 123=456 è impossibile.

Step 2: Dimostriamo ora la tesi.

Grazie allo Step 1, a meno di permutazioni si ha 123=A e 124=B. Questo assicura che tutte le terne fatte con elementi di {5, 6, 7, 8} devono essere di colore C; di conseguenza, ogni terna che contiene *esattamente un elemento* all'interno di $\{5, 6, 7, 8\}$ è sicuramente *non* di colore C. Ora si ha che certamente $356 \neq 478$, quindi non possono essere C entrambe le terne. È dunque vero che 356=A oppure che 478=B (o anche entrambe le cose). Per simmetria, possiamo suppore che si abbia 356=A. Ma allora si hanno le seguenti identità (ogni uguaglianza si deduce dalle precedenti tramite la regola e tramite l'osservazione di sopra sulle terne con un solo elemento in $\{5, 6, 7, 8\}$).

$$123 = \mathrm{A},\ 124 = \mathrm{B},\ 356 = \mathrm{A},\ 127 = \mathrm{B},\ 348 = \mathrm{A},\ 125 = \mathrm{B},\ 478 = \mathrm{C},\ 256 = \mathrm{B}\,.$$

Ma allora 147 non può essere A per colpa di 356=A, non può essere B per colpa di 256=B, e non può essere C perché ha solo un elemento in $\{5, 6, 7, 8\}$. L'assurdo mostra la tesi.