

MATHESIS
SEZIONE BETTAZZI

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

Liceo Scientifico Galileo Ferraris

II Simulazione Gara a Squadre

Fabio Roman
Gregory Distefano

18 Febbraio 2011

Indice

1 Istruzioni generali	2
2 Testi	4
3 Soluzioni	8
4 Elenco delle tipologie	11
5 Foglietti risposte	12

1 Istruzioni generali

- Per tutti i problemi, occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, si indichino le prime quattro cifre da sinistra.
- Tutti i punti cui sopra, tranne il primo, valgono naturalmente eccetto disposizioni contrarie nel testo dei problemi.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
 - $\sqrt{2} \cong 1.41421$
 - $\sqrt{5} \cong 2.23607$
- Sono vevoli le seguenti scadenze:
 - 10 minuti: tempo limite per scegliere il problema jolly, che vale doppio in termini di punti (ma anche di eventuali penalità);
 - 30 minuti: tempo limite per chiedere chiarimenti sul testo;
 - 100 minuti: fine della gara.
- Nelle gare, il punteggio viene attribuito solitamente in una delle seguenti due maniere:
 - metodo classico: ogni problema ha un suo valore in punti, che vengono guadagnati dalla squadra in caso di risposta esatta;
 - metodo moderno, utilizzato nelle gare di oggi: tutti i problemi partono dallo stesso valore; per il singolo problema, ogni minuto che passa senza che alcuna squadra abbia risposto correttamente ne fa aumentare il valore di 1 punto, mentre ogni risposta errata data da una squadra ne fa aumentare il valore di 2 punti. In questo modo, un problema più difficile sarà naturalmente portato a valere più di uno facile.

Con entrambe le metodologie:

- ogni risposta errata comporta una penalità di 10 punti, indipendentemente dal problema sul quale è stato compiuto l'errore;
- è possibile rispondere nuovamente ad un problema al quale si è data in precedenza una risposta sbagliata, ma in caso di nuovo errore, si subisce un'altra penalità;
- in caso di risposta esatta ad un problema in cui è stata data in precedenza una soluzione errata (o più di una), i punti di penalizzazione maturati prima rimangono e non vengono rimossi;
- rispondendo in maniera errata ad un problema a cui è già stata data la risposta corretta, si incorre pure nella stessa penalizzazione (nella fretta può succedere!); nessuna penalità, ma naturalmente nessun guadagno, dando due volte la risposta corretta allo stesso problema (segnatevi sempre i problemi risolti!).

In questa simulazione non sarà utilizzato un sistema di punteggio, essendo ritenuta più importante, in questa prima fase di training, un'analisi *qualitativa* dei problemi risolti, piuttosto che una visione *quantitativa*, a cui spazio sarà riservato ma più avanti.

Nella gara varranno poi ulteriori regolamentazioni. Non è necessario che siano applicate in sede di simulazione, ma può essere utile iniziare a prendere confidenza con esse. Alcuni punti del regolamento ufficiale:

- Ogni squadra è composta da 7 studenti. Uno studente deve essere iscritto al massimo al secondo anno, un altro deve essere iscritto al massimo al terzo anno, altri due devono essere iscritti al massimo al quarto anno (**ad esempio** 1 di II, 1 di III, 2 di IV, 3 di V, **oppure** 1 di I, 1 di II, 1 di III, 2 di IV, 2 di V).
- Ogni squadra ha un capitano al quale compete la distribuzione dei problemi ai componenti della squadra e la possibilità di fare domande al tavolo della giuria. Ogni squadra ha un consegnatore che porta materialmente le soluzioni dei problemi al tavolo della giuria. Capitano e consegnatore devono essere persone diverse.
- Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici ed altri strumenti di calcolo o di comunicazione. In particolare non ci devono essere telefoni cellulari nelle vicinanze dei tavoli delle squadre.
- Ogni squadra parte da un numero di punti pari a dieci volte il numero dei problemi (solitamente 20 o 24, in questa simulazione 16); questo per scongiurare spiacevoli sotto zero di squadre che accumulano più punti di penalità che punti di merito.

2 Testi

1. **Dov'è Via Roveda?** Un gruppo di tecnofolli è intenzionato a trovare una volta per tutte la leggendaria Via Roveda. Per farlo, si rivolgono al Matematico Pazzo, il quale però, su di una mappa della città di Torino, dà loro le indicazioni in modo molto enigmatico. Iniziando dalla casella più in alto a sinistra del reticolo tracciato sulla cartina topografica, procede percorrendo il lato superiore, poi il lato di destra, quello inferiore, quindi risale il lato di sinistra fino alla terzultima casella, per poi procedere all'interno spiraleggiando in senso orario fino a che rimangono caselle disponibili. Il Pazzo afferma che Via Roveda si trova dove termina questo percorso.
Ad esempio, se il rettangolo iniziale fosse 8×10 (8 righe, 10 colonne), la pista terminerebbe nella casella posta nella riga 5, colonna 3.
Determinare in quale riga ed in quale colonna termina la pista tracciata in un rettangolo 80×100 .
2. **Debiti da saldare** Mister Darg è infuriato! Il suo ex socio Pivì infatti, nonostante da mesi gli prometta di saldare quanto gli deve, finisce sempre per rimandare a tempo indeterminato i suoi propositi. Ripensando sulla quantità esatta di euro di credito, Darg osserva che si tratta del più piccolo intero a possedere esattamente 35 divisori positivi. Quanti euro deve Pivì a Darg?
3. **L'esposizione** In una scuola un'intera stanza è stata attrezzata per esporre i trofei conquistati nelle varie edizioni di questa gara. Per proteggere il prezioso pavimento dall'usura dovuta alle migliaia di visitatori, la stanza, di forma quadrata, è stata arredata disponendo 4 tappeti rettangolari uguali, senza creare sovrapposizioni, in modo da formare un camminamento che corre lungo tutto il perimetro, lasciando scoperto solo un quadrato al centro della stanza stessa. Sapendo che il perimetro di ogni tappeto è di 9 metri, determinare quanti decimetri quadrati misura l'area della stanza.
4. **Musica elettronica, musica che domina!** Alla convention di musica elettronica sta andando alla grande una nuova traccia piuttosto veloce: il numero di bpm è infatti, tra tutti i numeri inferiori o uguali a 240, il più grande che si scrive con lo stesso numero di cifre sia in base 6 che in base 10. A quanti bpm va la traccia?
5. **Il guardiano** La Coppa Gatteschi è stata esposta in un piazzale a forma di triangolo rettangolo isoscele, i cui lati minori sono lunghi 80 metri. Un ferocissimo cane è incaricato della sorveglianza. Per permettere agli spettatori di guardare la coppa più da vicino, gli organizzatori hanno pensato di limitare i movimenti del cane ponendogli ben 2 guinzagli, lunghi però 80 metri ciascuno, e fissati ai 2 estremi del lato più

lungo della piazzale. Determinare quanti metri quadrati del piazzale sono sotto il controllo del cane.

6. **L'equazione** Tutto preso dalla gara a squadre, un concorrente si è dimenticato di appuntarsi i compiti per casa. Ricorda vagamente che doveva risolvere un'equazione del tipo $x^9 - \dots x + 3 = 0$, però non riesce assolutamente a farsi tornare in mente il coefficiente di x proposto dall'insegnante. Si ricorda solo che era un multiplo positivo di 10 e sa che l'equazione deve avere almeno una soluzione intera, visto che proprio quello è stato l'argomento delle ultime lezioni. Determinare il coefficiente dimenticato.
7. **La defenestrazione** In un bagno della palestra di Cesenatico, sede di gara della fase nazionale a squadre, gli organizzatori vorrebbero sostituire uno specchio rettangolare le cui misure sono 109 x 156 centimetri (lo spessore è trascurabile). Per ragioni tecniche, sarebbe opportuno far uscire lo specchio dal finestrino del bagno, di forma rettangolare ma largo soltanto 60 centimetri. Determinare, in millimetri, la minima altezza che deve avere il finestrino affinché lo specchio possa uscire (intero).
8. **Doping** Nei giorni scorsi un blitz dei Carabinieri nelle sedi dei Licei Alfieri, Boccaccio e Carducci ha voluto accertare l'esistenza di casi di doping tra i concorrenti delle gare a squadre. Nonostante lo stretto riserbo degli inquirenti, ben 5 notizie sono apparse sulla stampa:
 - (a) Nessuna squadra è dopata.
 - (b) La squadra del Boccaccio è dopata.
 - (c) Una sola delle 3 squadre è dopata.
 - (d) Almeno una squadra tra Alfieri e Carducci è pulita (cioè non è dopata).
 - (e) Ci sono almeno 2 squadre dopate.

Oggi, pressati dai mass media, gli inquirenti hanno dichiarato che una ed una sola delle notizie trapelate è esatta. Determinare come stanno le cose.

Comporre la risposta in questo modo: nella prima posizione da sinistra si indichi il numero dell'affermazione corretta; nella seconda posizione si indichi 0 se la squadra del Liceo Alfieri è pulita, 1 se è dopata, 2 se le informazioni non sono sufficienti per stabilirlo; nella terza e quarta posizione si indichi la stessa cosa relativa ai Licei Boccaccio e Carducci, rispettivamente.

9. **La cassaforte** Alcuni malintenzionati vorrebbero intercettare la combinazione della cassaforte che contiene la Coppa Gatteschi, costituita

da una successione di 6 cifre. Il sistema da loro escogitato dovrebbe far sì che, quando un addetto digita una cifra della combinazione, questa appaia immediatamente sul display dei ladri. Purtroppo per loro, il sistema non funziona ancora bene, nel senso che funziona perfettamente quando vengono premute le cifre 0, 1, 2, ma quando vengono usate le altre cifre sul display non compare nulla. L'ultima volta che gli addetti hanno aperto la cassaforte, sul display dei malintenzionati sono apparse nell'ordine solo le 4 cifre 2011. Determinare quante sono le possibili combinazioni che i malintenzionati dovrebbero provare per essere sicuri di aprire la cassaforte.

10. **Il sorpasso** Ad una gara di speedway hanno partecipato 2 moto, le quali hanno dovuto percorrere 199 giri di una pista ghiacciata. La prima moto ha tenuto per tutta la gara un'andatura costante di 100 km/h. La seconda moto ha avuto un'andatura altalenante: ha infatti percorso il primo giro alla velocità costante di 101 km/h, il secondo giro alla velocità costante di 99 km/h, il terzo nuovamente a 101 km/h, e così via, percorrendo sempre i giri pari alla velocità di 99 km/h ed i giri dispari alla velocità di 101 km/h. All'inizio le 2 moto sono partite appaiate dalla linea di partenza. Determinare chi ha vinto e quanti sorpassi ci sono stati nel corso della gara (senza contare quello in partenza). Nella risposta usare la cifra di sinistra per indicare la moto vincitrice e le restanti 3, con eventuali zeri, per indicare il numero dei sorpassi (ad esempio la risposta 2031 vuol dire che ha vinto la seconda moto e ci sono stati 31 sorpassi durante la gara).
11. **Il piccolo Sudoku** Il piccolo Sudoku è il parente povero del Sudoku classico: si gioca su una tabella 4×4 , a sua volta suddivisa in quattro piccole tabelle 2×2 : ciascuna delle 16 caselle della tabella contiene una cifra (scelta tra 1, 2, 3, 4), in modo che nessuna delle 4 righe, delle 4 colonne, e delle 4 tabelle 2×2 contenga più di una volta la stessa cifra. Un piccolo Sudoku è stato iniziato ponendo le cifre 1, 2, 3, nell'ordine, nelle prime 3 caselle della diagonale principale (quella che parte in alto a sinistra e finisce in basso a destra). Determinare tutti i modi di completarlo, componendo la risposta in questo modo: nella prima posizione da sinistra si indichi il numero di modi di completarlo; nelle 3 caselle successive si indichi il numero di 3 cifre che nelle soluzioni compare il maggior numero di volte nella prima riga dopo la cifra 1 già presente all'inizio.
12. **Il baratto** Due allevatori hanno convenuto che un maiale vale 560 euro ed una pecora ne vale 390. Poichè entrambi dispongono di tante pecore e tanti maiali, ma niente denaro contante, hanno deciso di usare gli animali come moneta di scambio. Ad esempio, se il primo deve al secondo 50 euro, lo paga con 3 pecore e si fa dare come resto 2 maiali,

saldando così il debito con il passaggio di mano di 5 animali. Determinare il minimo numero di animali che devono passare di proprietà (pagamento più resto) per saldare un debito di 20 euro.

13. **The Game** The Game è un gioco molto semplice: si perde ogni volta che si pensa al gioco! Tuttavia, non si può perdere se si è già perso nei 30 minuti precedenti. Marco pensa a The Game a tutti gli orari nei quali il numero dell'ora è un numero triangolare (zero compreso) e il numero dei minuti è un numero quadrato (ancora, zero compreso). Quante volte perde Marco ogni giorno?
14. **Ottimizzazione** Il Matematico Pazzo ha indotto un contest per distribuire i tanti biglietti che gli hanno regalato per il prossimo live di Gigi Dag: si tratta di determinare il minimo valore di

$$\frac{4a^3}{b} + \frac{b+1}{a}$$

al variare di $a > 0$ e $b > 0$ numeri reali. Sareste in grado di aggiudicarvi un posto in prima fila?

15. **Causa legale** Mister Darg è di nuovo arrabbiato! Questa volta, il chiropratico Jems gli ha fatto causa per un'inezia ed ora gli tocca andare in tribunale. Convinto di essere dalla parte della ragione ma dubbioso sulle sue possibilità di spuntarla, il nostro Darg si rivolge al Matematico Pazzo, che gli dice la probabilità che secondo lui abbia Jems di perdere la causa affermando che essa è equivalente al seguente gioco: si lanciano due dadi a sei facce, uno rosso e uno verde. Se il numero sul dado rosso è maggiore di quello sul dado verde, allora la ragione è di Darg. Se i numeri sono uguali, allora la ragione è di Jems. Se invece il numero sul dado verde è il più grande, allora si ripete il gioco a parti invertite, ed eventualmente si procede ad oltranza. Quale probabilità ha Darg di avere riconosciute le proprie ragioni? Esprimere il risultato come somma del numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.
16. **Meritate vacanze** Dopo mesi di intense peripezie, Mister Darg ed il Matematico Pazzo decidono di concedersi un po' di giorni di meritata vacanza. Tuttavia, a causa dei loro impegni, non possono permettersi di staccare per troppo tempo. Facendo però una previsione su quanti giorni di ferie si possano fare quest'anno e nei prossimi tre, si osserva che nell'anno n , per $2011 \leq n \leq 2014$, il numero di giorni corrisponde all'ultima cifra diversa da zero del fattoriale di 5^{n-5} . Quanti giorni avranno a loro disposizione i nostri due? Rispondere un numero le cui quattro cifre siano nell'ordine i giorni di vacanza degli anni dal 2011 al 2014.

3 Soluzioni

Si riportano i risultati di tutti i problemi, illustrando il procedimento per alcuni di essi.

1. **4139.**

2. **5184.** Dato un numero intero positivo n , e la sua scomposizione in fattori primi $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$ con $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$, il numero di suoi divisori positivi è pari a $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_r + 1)$. Poiché $35 = (34 + 1)$, e $35 = 7 \cdot 5 = (6 + 1) \cdot (4 + 1)$, si presentano i seguenti casi:

- $\alpha_1 = 34$; in tal caso prendiamo per p_1 il valore più piccolo ammissibile, che è naturalmente $p_1 = 2$, ed abbiamo il numero 2^{34} ;
- $\alpha_1 = 6, \alpha_2 = 4$; in tal caso prendiamo ancora per p_1 e p_2 i valori più piccoli possibili, ovvero $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$; si noti che si minimizza l'espressione elevando il primo più piccolo all'esponente più grande e moltiplicando per il primo più grande elevato all'esponente più piccolo, confrontando infatti $b_1 = 2^6 \cdot 3^4$ e $b_2 = 2^4 \cdot 3^6$, si dividano tali quantità per $d = 2^4 \cdot 3^4$, numero positivo e per cui pertanto la divisione per esso mantiene l'ordinamento, risulta $b_1/d = 2^2 = 4$ e $b_2/d = 3^2 = 9$, con naturalmente la seconda quantità più grande della prima.

Si verifica immediatamente che $2^{34} > 2^{30} > 10^9$ e pertanto tale quantità supera il miliardo, mentre $2^6 \cdot 3^4 < 2^6 \cdot 3^6 = 6^6 < 10^6$ e dunque tale quantità è inferiore al milione. Il valore da calcolare esplicitamente è pertanto il secondo e risulta $2^6 \cdot 3^4 = 5184$.

3. **2025.**

4. **0215.** Data una base b , i numeri che si scrivono in tale base con esattamente k cifre sono tutti e soli quelli compresi, estremi inclusi, tra b^{k-1} e $b^k - 1$.

In base 6:

- si scrivono con 1 cifra i numeri tra 1 e 5;
- si scrivono con 2 cifre i numeri tra 6 e 35;
- si scrivono con 3 cifre i numeri tra 36 e 215;
- si scrivono con 4 cifre i numeri tra 216 e 1295;

e così via.

In base 10 invece:

- si scrivono con 1 cifra i numeri tra 1 e 9;
- si scrivono con 2 cifre i numeri tra 10 e 99;
- si scrivono con 3 cifre i numeri tra 100 e 999;
- si scrivono con 4 cifre i numeri tra 1000 e 9999;

e di seguito.

Poiché abbiamo imposto che la quantità dovesse essere al più pari a 240, la risposta esatta è 215.

5. **1826.**

6. **6560.** Sia a il coefficiente del termine di primo grado da individuare. Se l'equazione deve avere una soluzione intera x_0 , essa sarà, essendo il coefficiente direttivo unitario, un divisore (positivo o negativo) del termine noto, quindi un elemento dell'insieme $\{-3, -1, 1, 3\}$. Vediamo i vari casi:

- se $x_0 = -3$, allora $(-3)^9 - a \cdot (-3) + 3 = 0$, dunque $-19683 + 3a + 3 = 0$, da cui $3a = 19680$, e $a = 6560$.

Abbiamo già trovato una soluzione accettabile. Verichiamo ora che per gli altri valori non si ottengono soluzioni accettabili.

- se $x_0 = -1$, allora $(-1)^9 - a \cdot (-1) + 3 = 0$, dunque $-1 + a + 3 = 0$, da cui $a = -2$, che non è né positivo né un multiplo di 10;
- se $x_0 = 1$, allora $1^9 - a \cdot 1 + 3 = 0$, da cui $1 - a + 3 = 0$, ne segue $a = 4$, ancora non accettabile;
- se $x_0 = 3$, allora $3^9 - a \cdot 3 + 3 = 0$, quindi $19683 - 3a + 3 = 0$, allora $-3a = 19686$, pertanto $a = -6562$, che come prima non rispetta i criteri richiesti dal problema.

7. **0910.**

8. **5101.**

9. **0735.** Poiché non vengono visualizzate tutte e sole le cifre da 3 a 9, ed essendo che su sei cifre digitate ne risultano sul display soltanto quattro, le cifre digitate che hanno comportato una non visualizzazione sono state in numero di due, e gli insiemi ordinati possibili di tali coppie di cifre sono naturalmente $(9 - 3 + 1) \cdot (9 - 3 + 1) = 7 \cdot 7 = 49$. Fissata una coppia ordinata di cifre, essa può essere posizionata rispetto alle quattro cifre già presenti in $\binom{6}{2} = 15$ modi. Il numero totale di combinazioni possibili è pertanto $49 \cdot 15 = 735$.

10. **1099.**

11. **6423**.

12. **0017**.

13. **0014**. Marco pensa a The Game ai seguenti orari:

00:00	00:01	00:04	00:09	00:16	00:25	00:36	00:49
01:00	01:01	01:04	01:09	01:16	01:25	01:36	01:49
03:00	03:01	03:04	03:09	03:16	03:25	03:36	03:49
06:00	06:01	06:04	06:09	06:16	06:25	06:36	06:49
10:00	10:01	10:04	10:09	10:16	10:25	10:36	10:49
15:00	15:01	15:04	15:09	15:16	15:25	15:36	15:49
21:00	21:01	21:04	21:09	21:16	21:25	21:36	21:49

Soltanto in quelli segnati in grassetto però perde, perché in tutti gli altri ha già perso nei 30 minuti precedenti. Essi sono 14.

14. **0004**.

15. **0027**. La probabilità che a Dario venga data ragione è:

$$\frac{5}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{12}\right)^2 \cdot \frac{5}{12} + \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \dots$$

in quanto ha $\frac{5}{12}$ di vincere subito, $\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{6}$ che al primo tiro si invertano le parti e che poi vinca al secondo tiro, $\left(\frac{5}{12}\right)^2 \cdot \frac{5}{12}$ che al primo tiro si invertano le parti, ancora al secondo tiro si invertano le parti, e al terzo tiro vinca.

Separando i casi in cui vince dopo un numero pari di tiri da quelli dove vince dopo un numero dispari di tiri possiamo scrivere tale probabilità come:

$$\frac{5}{12} \cdot \left(1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2 + \left(\frac{5}{12}\right)^4 + \dots\right) + \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2 + \left(\frac{5}{12}\right)^4 + \dots\right)$$

dove si può raccogliere ottenendo:

$$\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{6} \cdot \left(1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2 + \left(\frac{5}{12}\right)^4 + \dots\right) = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{6} \cdot \left(1 + \left(\frac{25}{144}\right) + \left(\frac{25}{144}\right)^2 + \dots\right)$$

Applicando la formula che restituisce la somma di una serie geometrica si ottiene:

$$\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{144}{119} = \frac{10}{17}$$

che è il risultato ridotto ai minimi termini, e somma di numeratore e denominatore dà 27.

16. **4862**.

4 Elenco delle tipologie

Per ogni problema viene indicata la tipologia a cui appartiene.

1. matematizzazione
2. teoria dei numeri
3. geometria
4. teoria dei numeri
5. geometria
6. algebra
7. geometria
8. logica
9. combinatoria
10. matematizzazione
11. combinatoria
12. teoria dei numeri
13. matematizzazione
14. algebra
15. probabilità
16. algebra

