

## Problemi di allenamento - 15 febbraio 2011

*Basati su di una prova data ad un istituto il 28 gennaio 2011; alcuni esercizi sono stati presi dalla simulazione  $\varphi^2$  di Sandro Campigotto del 13 dicembre 2010. Gli esercizi sono stati concepiti per una gara a squadre, ma ammettono anche dimostrazioni rigorose per allenarsi per l'individuale.*

1. **Len-to Violento!** Angelo è al live di Gigi d'Agostino! Per immergersi completamente nel mondo del Lento Violento, decide di piazzarsi nel centro del quadrato di lato  $10\text{ m}$  formato dalle quattro casse. Sapendo che:
  - la potenza di un'onda acustica è inversamente proporzionale al quadrato della distanza;
  - i decibel sono una scala esponenziale: 10 decibel in più corrispondono ad una potenza 10 volte superiore, e come base della scala si pone  $0\text{ dB} = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$ ;
  - nel momento di massima intensità, le casse emettono tutte la stessa potenza sonora, che è pari a  $400\pi\text{ W}$ , in maniera tale che a  $1\text{ m}$  di distanza, su di una superficie di  $4\pi\text{ m}^2$ , incida una potenza per unità di superficie di  $100 \frac{W}{m^2}$ , pari a  $140\text{ dB}$ ;
  - $0.300 < \log_{10} 2 < 0.302$ .

determinare a quanti decibel la musica giunge nelle sue orecchie, nel momento di massima intensità e nell'ipotesi che le onde sonore provenienti dalle quattro casse interferiscano solo costruttivamente e non in maniera distruttiva, ovvero che la potenza totale sia la somma delle singole potenze.

2. **Coincidenze di compleanni** Oggi è un giorno speciale. Sia la nipote Elisa che lo zio Oreste festeggiano il loro compleanno. Oreste, che è molto bravo in matematica si è accorto che se scrivesse l'età di Elisa e di seguito la sua, avrebbe un numero di 4 cifre che è un quadrato e la stessa cosa avverrà tra 13 anni. Se Oreste ha 17 anni più di Elisa, quanti anni compiono oggi i due? (Dare come risposta il prodotto delle due età.)
3. **Voto di fiducia** Il governo di Matelandia è in crisi! Dei 500 deputati, 200 appartengono al Partito dei Lineari e appoggiano in blocco l'esecutivo, 170 appartengono al Partito Differenziale e votano in massa la sfiducia, così come i 30 appartenenti all'Identità dei Vettori. I 31 dell'Unione delle Classi si astengono, mentre il vero ago della bilancia sono i 40 del Lattice Normale e i 29 della Funzione Logaritmica Ignorata: i primi infatti chiedono più spazio per la geometria differenziale, mentre

i secondi ritengono che il Partito dei Lineari dia troppa importanza ai problemi agli autovalori ignorando questioni ben più esponenziali. Sapendo che ognuno di questi deputati può votare la fiducia o la sfiducia entrambe con probabilità  $\frac{1}{2}$ , qual è, in percentuale, la probabilità che il governo resista?

4. **Lettera di San Valentino** Con un po' di anticipo, Carlo ha già scritto una romantica lettera per la sua lontana amata su un foglio di carta rettangolare. Quando lo ha piegato in due, per imbustarlo si è reso conto che le proporzioni tra i lati non sono cambiate. Qual è il rapporto tra il lato più lungo e quello più corto della lettera di Carlo? (Dare la risposta moltiplicata per 1000.)
5. **Fell running** In un campionato di gare di corsa in montagna, composto da 5 prove, vengono attribuiti 80 punti al primo, 79 al secondo, e di seguito a decrescere, fino a 2 al 79esimo, e 1 a tutti i restanti concorrenti che si classificano. Tra gli altri, partecipano Attardi, Bracco, e Cantanna. Dopo quattro prove Cantanna conduce con 314 punti, seguito da Bracco con 310 e da Attardi con 306. Gli altri concorrenti hanno tutti meno di 225 punti e non posso pertanto più aggiudicarsi il campionato. Determinare quanti sono i possibili piazzamenti che vedono Cantanna vincitore del campionato senza parimerito, ovvero con almeno un punto di vantaggio sul secondo, sapendo che nell'ultima gara prendono parte esattamente 100 atleti, e dando come risposta le quattro cifre più a destra.
6. **Sogni mondiali** Daniele, che sogna di partecipare alle IMO, ha ricevuto in regalo il libro con tutte le prove dal 1959 al 2010. Pur pensando di non essere in grado di risolvere alcun problema, lo inizia a sfogliare incuriosito. Tuttavia, la sua curiosità diventa qualcosa di più quando, leggendo il primo problema presentato nella prima edizione della manifestazione, si ricorda di un argomento che ha appena affrontato a scuola, e tramite quello riesce ad arrivare alla soluzione. Il problema, posto in una forma leggermente differente, può essere reso come: determinare, al variare di  $n$ , il massimo comun divisore di  $21n + 4$  e  $14n + 3$ . Sareste anche voi in grado di dare la risposta esatta?
7. **Fell running II** Dopo un lungo procedimento sei riuscito a risolvere il problema sulla corsa in montagna? Bene, hai la possibilità di fare il bis. La consegna di questo problema è identica a quella del problema *Fell running*, con la differenza di dover scrivere le quattro cifre più a sinistra.
8. **Di prima mattina** Di ritorno dal live di Gigi d'Agostino, Angelo si ferma in un bar a fare la prima colazione. Nello spazio retrostante, alcuni operai sono già al lavoro per realizzare una struttura. Il capo

assegna loro un incarico: Procedete alla costruzione di uno spazio delimitato di lati  $11\ m$ ,  $15\ m$  e ... Purtroppo il suono di un clacson nel momento in cui pronuncia la terza lunghezza non gli permette di comprenderla appieno, ma Angelo è sicuro di aver capito che l'ultima misura  $k$  è un numero intero. Per quanti valori di  $k$  lo spazio delimitato avrà la forma di un triangolo ottuso?

9. **War without end**

*Ha aspettato chiuso e sigillato... per più di 900 anni...*

Sommellier e Galfer sono di nuovo ai ferri corti! Per placare l'aria di sfida tra i due istituti viene indotto un contest composto da quattro discipline: ballo tecktonik, elaborazione autovetture, gara di matematica, certamen di latino. Nelle prime due sono favoriti i tecnici, con probabilità rispettivamente di 80% e 70%, mentre nelle ultime due i liceali, con le stesse probabilità. Tuttavia, si profila la possibilità di un clamoroso pareggio, che non risolverebbe la rinnovata rivalità. Qual è la probabilità che si verifichi tale evenienza?

10. **Alla sfilata** Amelyne, Julie e Naomi partecipano ad una sfilata di moda. Entrambe hanno 10 capi da provare; 5 sono in comune tra ognuna delle coppie di ragazze, mentre solo 2 sono in comune tra tutte e tre. Quanti capi ci sono in tutto?
11. **Babbo Natale al cioccolato** Esattamente un mese fa, a tutti i visitatori di un centro commerciale, è stato fatto scegliere a caso un biglietto da un'urna contenente tutti i numeri da 400 a 5000. Se il numero estratto era formato da cifre strettamente crescenti (ad esempio 123 è formato da cifre strettamente crescenti, 122 no) allora il fortunato vinceva un Babbo Natale di cioccolata. Alla fine della giornata sono stati distribuiti tutti i numeri. Soltanto ieri però l'organizzazione ha voluto divulgare pubblicamente il numero dei vincitori. L'avreste già potuto sapere prima voi?
12. **Combinazione segreta** La cassaforte che custodisce l'hard disk in cui Gigi d'Agostino ha salvato i suoi nuovi brani inediti, è protetto da una combinazione numerica che viene cambiata ogni giorno da un responsabile, il quale la comunica al Matematico Pazzo, addetto alla sorveglianza, sotto forma di equazione. Oggi il Pazzo ha ricevuto un foglietto con scritto:  $x! = \frac{(7!)!}{7!}$ . Qual è la combinazione?
13. **Il tamango** In un locale di via Fratelli Calandra viene servito un particolare cocktail: il tamango. Questa bevanda particolarmente alcolica viene servita con gli usuali cubetti di ghiaccio, ma la gradazione è sufficientemente alta per far sì che, invece di galleggiare come al solito, il ghiaccio finisca sul fondo del bicchiere. Sapendo che:

- un solido immerso in un liquido galleggia se la sua densità è minore, affonda se è maggiore;
- la densità dell'acqua è pari a 1;
- la densità dell'alcol etilico è pari a 0.789;
- la densità del ghiaccio è pari a 0.918;

e supponendo che:

- le sostanze contenute nella soluzione alcolica diverse da acqua ed etanolo non influiscano sulla densità della soluzione stessa;
- la densità della soluzione alcolica sia lineare rispetto alla gradazione alcolica, vale a dire che, se per esempio si ha il 70% di acqua e il 30% di alcool, il valore della densità sarà quel numero la cui differenza rispetto alla densità dell'alcool moltiplicata per 30 è pari alla differenza rispetto alla densità dell'acqua moltiplicata per 70.

calcolare, sulla base di queste informazioni, la gradazione minima, in percentuale, che il tamango può avere.

14. **La famiglia Fibonacci** Questa famiglia che possiede lo stesso cognome del grande matematico medievale è alle prese con un problema basato sulla serie intitolata al loro omonimo: sia la serie 0, 0.1, 0.01, 0.002, 0.0003, 0.00005, 0.000008, 0.0000013, 0.00000021, ..., in cui vengono scritti i termini della serie di Fibonacci ma dove ogni volta ci si sposta di un decimale. Il figlio più grande, che sta studiando Analisi 1 al primo anno di Matematica all'università, osserva come la somma infinita di questa serie sia finita poiché il rapporto tra un termine e il precedente tende, al crescere del numero progressivo del termine, ad una quantità minore di 1. Sapreste dire con esattezza a quanto tende tale quantità. Dare come risposta le prime quattro cifre decimali.
15. **La piazza** La grande piazza della città in cui Gigi d'Agostino ha deciso di tenere il prossimo live all'aperto ha la forma di un triangolo. Per l'occasione, verrà posizionata una cassa proprio nel punto di incontro delle mediane. Mentre si ispezionava il luogo, si è scoperto che due delle tre mediane sono tra loro perpendicolari. Sapendo che la loro misura è 240 m e 450 m, quanto misura la terza mediana? Dare la risposta in metri.
16. **La famiglia Fibonacci II** Dopo aver determinato che la serie converge, il figlio maggiore della famiglia Fibonacci si mette a calcolare il valore esatto a cui tende tale somma. E voi siete in grado di rispondere a tale interrogativo? Considerato il risultato sotto forma di frazione ridotta ai minimi termini, dare come risposta il numeratore nelle due cifre di sinistra e il denominatore nelle due cifre di destra.