Combinatoria – Problemi di ammissione

C1. Pietro ha n carte messe in fila, raffiguranti i numeri da 1 a n e disposte in ordine casuale. Svolge poi una serie di mosse. In ciascuna mossa, se k è il numero sulla prima carta, prende le prime k carte e le inverte di ordine, ovvero scambia la prima e la k-esima, la seconda e la $(k-1)$-esima e così via. Ad esempio, se la sequenza di carte è $(3, 1, 4, 2)$ dopo una mossa diventa $(4, 1, 3, 2)$.

Dimostrare che a un certo punto la prima carta è quella raffigurante il numero 1.

C2. Ci sono $n \geq 2$ città nel piano. Supponiamo che per ogni città X ci sia un'altra città $N(X)$ che sia strettamente più vicina a X di tutte le altre città. Vengono costruite delle strade bidirezionali che connettono ogni città X alla sua $N(X)$; non vengono costruite altre strade. Supponiamo di sapere che partendo da una città qualsiasi si possa raggiungere ogni altra città seguendo una serie di strade. Chiamiamo una città Y *suburbana* se $Y = N(X)$ per qualche città X.

Dimostrare che ci sono almeno $(n-2)/4$ città suburbane.

C3. Sia n un intero positivo. Max e Ludo giocano ad un gioco con $2n$ lampadine numerate da 1 a $2n$ da sinistra a destra. Inizialmente tutte le lampadine dalla 1 alla n sono accese, mentre tutte le lampadine dalla $n+1$ alla $2n$ sono spente. Inizia a giocare Max e poi si alternano con le seguenti regole:

- Nel suo turno Max può scegliere 2 lampadine adiacenti i e $i+1$ tali che i sia accesa e $i+1$ sia spenta, e cambiare lo stato di entrambe.
- Nel suo turno Ludo può scegliere 2 lampadine adiacenti che siano entrambe accese o entrambe spente, e cambiare lo stato di entrambe.

I giocatori devono sempre fare una mossa nel loro turno finchè gli è possibile. Quanto un giocatore non può muovere, il gioco finisce.

Determinare tutti gli n per cui Ludo può far finire il gioco spegnendo tutte le lampadine, indipendentemente dalle mosse di Max.