Soluzioni test di ammissione stage Senior 2023

Le seguenti soluzioni si riferiscono in particolare al documento scaricabile a questo link.

Quesito 1

Soluzione. Utilizzando la disuguaglianza AM-GM abbiamo

$$\frac{a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3}c^2}{6} \geq \sqrt[6]{a^2 \cdot \frac{1}{4}b^4 \cdot \frac{1}{27}c^6} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{6^3} \geq \frac{1}{6\sqrt{3}}ab^2c^3,$$

dunque la costante cercata è $M = \frac{\sqrt{3}}{36}$. Tra le quantità proposte solamente $\frac{1}{M^2}$, ovvero la **(B)**, è intera.

Quesito 2

Soluzione. L'opzione **(A)** è quella corretta: la disuguaglianza è infatti soddisfatta dalla terna $(a, b, c) = (1, 2, 2)$, come è facile verificare. Dimostriamo ora che le altre disuguaglianze sono false per ogni terna di interi positivi.

Dalla disuguaglianza QM-AM si trova

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Affinché la disuguaglianza **(B)** sia vera si deve quindi avere

$$\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \geq a+b+c \geq 2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (2-\sqrt{3})\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leq 0,$$

che è impossibile, perciò l'opzione **(B)** è errata.

Analizziamo ora la disuguaglianza **(C)**. Ricordando l'identità

$$4(ab+bc+ca) = 2(a+b+c)^2 - 2(a^2+b^2+c^2),$$

se la disequazione fosse vera per almeno una terna, per quella terna si dovrebbe avere

$$2(a+b+c)^2 \geq 7(a^2+b^2+c^2) \Longrightarrow \frac{7}{2}(a^2+b^2+c^2) \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2),$$

dove l'ultima disuguaglianza deriva da QM-AM. La relazione trovata è evidentemente falsa, pertanto anche la **(C)** è errata.

Per quanto riguarda la disuguaglianza **(D)**, da AM-GM si ricava che

$$\frac{a^2+2b^2+c^2}{3} \geq \sqrt[3]{2a^2b^2c^2} \Longrightarrow (a^2+2b^2+c^2)^3 \geq 54a^2b^2c^2,$$

quindi deve per forza essere $(a^2+2b^2+c^2)^3 = 54a^2b^2c^2$, il che accade se e solo se $a=b=c$; sostituendo nell'equazione si trova $a=0$, assurdo. Anche l'opzione **(D)** è sbagliata, dunque.

Per dimostrare la falsità di **(E)** basta applicare AM-GM:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Longrightarrow 27abc \leq (a+b+c)^3 \leq 26abc.$$

L'unica possibilità è che almeno uno tra a, b, c sia 0, il che è impossibile.

Quesito 3

Soluzione. Il volume cercato è

$$V=(a+2)(b+2)(c+2)=abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+8.$$

Sfruttando le formule di Viète ricaviamo $abc=2$, $ab+bc+ca=\frac{23}{2}$, $a+b+c=\frac{17}{2}$, da cui $V = 2+23+34+8=67$. La risposta è dunque la **(C)**.

Quesito 4

Soluzione. Denotiamo rispettivamente con (1), (2) e (3) le tre equazioni e per ognuna indichiamo con $P(x,y)$ la proposizione data.

Nella (1) si nota facilmente che la funzione $f(x)=0$, né iniettiva né suriettiva, è soluzione.
Ponendo ora $P(0,y)$ si ottiene $2y \cdot f(0)=0$, da cui $f(0)=0$. Ponendo poi $P(-f(y),y)$ si ha $(-f(y)+2y)\cdot f(-f(y))=0$, da cui si ottiene come soluzione la funzione $f(x)=2x$, che è biunivoca.

Nella (2), considerando $P(0,0)$ si ricava $f(0)=\pm 3 \neq 0$. Da $P(0,y)$ si ottiene invece $f(0)f(y) = -6y^2+9$, da cui $f(y)=-\frac{6}{f(0)}y^2+\frac{9}{f(0)}$. Ciò significa che f deve essere della forma $f(x)=ax^2+b$ per qualche a, b reale. Sostituendo nella (2) e facendo i dovuti confronti si vede che l'unica soluzione è $f(x)=2x^2-3$, che non è né iniettiva né suriettiva.

Infine, nella (3), ponendo $P(x,0)$ si ha $f(-f(x)) = 3x + f(0)$; poiché il membro di destra rappresenta una funzione biunivoca, segue che anche f lo deve essere. Dunque esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $f(a) = 0$. Ponendo $P(a,y)$ si ottiene $f(y) = 3a - 4y + f(y) \Longrightarrow y = \dfrac{3}{4}a$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, che è falso. Pertanto la (3) non ha soluzioni.

In definitiva, solo la (1) ammette almeno una soluzione iniettiva (Alberto ha ragione), la (1) e la (2) ammettono entrambe almeno una soluzione non suriettiva (Barbara ha torto) e la (3) non ha soluzioni (Cristina ha torto). La risposta corretta è dunque la **(B)**.

Quesito 5

Soluzione. Prendiamo in considerazione il polinomio

$$P(x) = x^3 - 2027x^2 + 8096x + c,$$

con c intero arbitrario. Il polinomio in questione ha la proprietà che $P(2) = P(2023)$, come è facile verificare. Inoltre nessun intero $n \notin \{2, 2023\}$ è tale che $P(n) = P(2) = P(2023)$, infatti se così non fosse si avrebbe

$$\begin{gathered}
2^3 - 2027 \cdot 2^2 + 8096 \cdot 2 + c = n^3 - 2027n^2 + 8096n + c \Longrightarrow \\
\Longrightarrow (n^3 - 2^3) - 2027(n^2 - 2^2) + 8096(n-2) = 0 \Longrightarrow \\
\Longrightarrow n^2 + 2n + 4 - 2027n - 2027 \cdot 2 + 8096 = \\
= n^2 - 2025n + 4046 = (n-2)(n-2023) = 0,
\end{gathered}$$

da cui $n = 2$ oppure $n = 2023$, assurdo. Pertanto $P(x)$ soddisfa le condizioni del problema. Inoltre notiamo che $a = -2027$ e $b = 8096$, dunque l'affermazione **(E)** è vera. Siccome, poi, il valore di c è arbitrario, ne esiste sicuramente uno tale che $P(2024) = 0$, perciò anche la proposizione **(C)** è vera.

Prendiamo ora in considerazione il polinomio

$$Q(x) = x^3 - 4048x^2 + (2025^2 - 4)x + c,$$

dove c è ancora un intero arbitrario. Seguendo lo stesso metodo usato per $P(x)$ si dimostra facilmente che anche $Q(x)$ è tale che gli unici interi n che soddisfano $Q(n) = Q(2)$ sono $n = 2$ e $n = 2023$, quindi anche $Q(x)$ soddisfa le condizioni del problema. Osserviamo poi che $a = -4048$ e $b = 2025^2 - 4 > 10^6$, quindi l'affermazione **(A)** è vera. Inoltre si verifica che $Q(1000) > Q(2)$, dunque l'affermazione **(D)** è vera.

Per entrambi i polinomi, invece, l'affermazione **(B)** risulta falsa. Dimostreremo, in effetti, che $P(x)$ e $Q(x)$ sono gli unici polinomi che soddisfano le condizioni del problema, il che dimostrerà definitivamente la falsità di **(B)** e, dunque, la sua correttezza come risposta. Per comodità illustreremo la dimostrazione insieme con l'euristica sfruttata per risolvere il quesito, dato che chiaramente i due polinomi mostrati non sono per nulla facili da trovare senza una strategia precisa.

Euristica. Dalla condizione $p(2) = p(2023)$ si ricava l'equazione

$$2^3 + 2^2a + 2b + c = 2023^3 + 2023^2a + 2023b + c \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (2023^3 - 2^3) + (2023^2 - 2^2)a + (2023 - 2)b = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2023^2 + 4050 + 2025a + b = 0, \tag{1}$$

da cui $b \equiv -4 \pmod{2025}$. Si può quindi scrivere $b = 2025k - 4$, con $k \in \mathbb{Z}$. Sostituendo nella (1) si ottiene

$$a = -\frac{2025k + 4046 + 2023^2}{2025} = -(k + 2023).$$

Ogni $p(x)$ che rispetti le condizioni del problema deve quindi essere della forma

$$p(x) = x^3 - (k + 2023)x^2 + (2025k - 4)x + c,$$

con c intero arbitrario. Non rimane che trovare quei valori di k per cui $n = 2023$ e $n = 2$ sono gli unici interi tali che $p(n) = p(2)$.
Per fare ciò, sia n un intero tale che $p(n) = p(2)$. Allora

$$2^3 - (k + 2023) \cdot 2^2 + (2025k - 4) \cdot 2 + c = n^3 - (k + 2023)n^2 + (2025k - 4)n + c \Longrightarrow$$

$$0 = (n^3 - 2^3) - (k + 2023)(n^2 - 2^2) + (2025k - 4)(n - 2) =$$

$$= (n - 2)(n^2 + 2n + 4 - (k + 2023)n - 2(k + 2023) + 2025k - 4) =$$

$$= (n - 2)(n^2 - (k + 2021)n + 2023(k - 2)) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (n - 2)(n - 2023)(n - (k - 2)) = 0.$$

Siccome n può valere solo 2 o 2023, le uniche possibilità sono $k = 4$ e $k = 2025$, dalle quali si ricavano rispettivamente i polinomi $P(x)$ e $Q(x)$, che sono pertanto gli unici che soddisfano tutte le condizioni del problema, come volevasi dimostrare.

Quesito 6

Soluzione. Osserviamo che il numero massimo di elementi di un sottoinsieme che rispetta il distanziamento (che chiameremo in seguito *sottoinsieme bello* per brevità) è 5 poiché se gli elementi fossero almeno 6 ce ne sarebbero inevitabilmente due consecutivi.
Consideriamo ora un sottoinsieme bello con $0 \leq n \leq 5$ elementi. Notiamo che un qualsiasi sottoinsieme di questo tipo è univocamente identificato da una stringa di lettere di lunghezza 10 con n lettere E e $10 - n$ lettere D posizionate nello stesso ordine dei numeri da 1 a 10. Ad esempio, un insieme bello con 3 elementi è $\{2, 4, 9\}$, che corrisponde alla stringa DEDEDDDDED.
La domanda è: quante stringhe di questo tipo, cioè con le E distanziate, esistono? Per rispondere, consideriamo il caso particolare appena illustrato con $n = 3$ e poi generalizziamo. Possiamo pensare, per esempio, di disporre le lettere E nel seguente modo

$$\ldots \text{E} \ldots \text{E} \ldots \text{E} \ldots$$

e di riempire poi gli spazi dei puntini con le lettere D per rispettare il distanziamento. Sicuramente vanno messe due lettere D nei due spazi coi puntini centrali; le 5 D rimanenti si possono disporre arbitrariamente nei 4 posti. Il problema è perciò equivalente al distribuire 5 caramelle a 4 bambini, il che si può fare in $\binom{8}{5} = \binom{8}{3}$ modi.

In generale, date n lettere E e $10 - n$ lettere D, ci sono $\binom{10+1-n}{n}$ stringhe in cui le E sono distanziate. In altre parole, il numero di sottoinsiemi belli con n elementi è $\binom{11-n}{n}$. Ne consegue che i sottoinsiemi belli di $\mathbb{X}$ sono esattamente

$$\binom{11}{0} + \binom{10}{1} + \binom{9}{2} + \binom{8}{3} + \binom{7}{4} + \binom{6}{5} = 144,$$

dunque la risposta giusta è **(E)**.

Quesito 7

Soluzione. Se le rette fossero a tre a tre non concorrenti, i punti di intersezione totali, i quali sarebbero tutti quanti intersezioni tra due rette, ammonterebbero a $\binom{100}{2}$. Per rispondere dobbiamo quindi sottrarre a questa quantità il numero di punti di intersezione che "svaniscono" quando tre o più rette concorrono. In particolare, se n delle rette fossero a tre a tre non concorrenti ci sarebbero $\binom{n}{2}$ punti di intersezione, che vanno quindi sottratti a $\binom{100}{2}$. Di conseguenza il numero di punti per cui passano esattamente 2 rette è $N = \binom{100}{2} - 3\binom{3}{2} - 4\binom{4}{2} - 5\binom{5}{2} - 6\binom{6}{2} = 4777 = 17 \cdot 281$. La risposta è quindi la **(D)**.

Quesito 8

Soluzione. Indicando con numeri diversi colori diversi, tutte le possibili colorazioni che rispettano le condizioni richieste, a meno di permutazioni tra i colori, sono le seguenti:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc} 3 & & 2 & 3 & & 2 & 3 & & 4 & 3 & & 4 & 3 & & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}$$

Per il primo tipo di colorazione, tenendo anche conto delle possibili permutazioni dei 5 colori, ci sono $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ possibilità, per gli altri quattro tipi ce ne sono $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$, per un totale di $C = 60 + 4 \cdot 120 = 540$ colorazioni possibili. 540 si scompone come $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ e ha perciò $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ divisori positivi, per cui la risposta è la **(B)**.

Quesito 9

Soluzione. La cardinalità di $\mathcal{P}_*(\mathbb{X})$ è pari a $2^{2023}-1$ in quanto in ogni sottoinsieme ogni elemento di $\mathbb{X}$ può essere presente oppure no (ovviamente non stiamo considerando il caso dell'insieme vuoto, non previsto dal problema). Poiché un qualsiasi elemento di $\mathbb{X}$ compare esattamente in $2^{2023}-1-(2^{2022}-1)=2^{2022}$ dei sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{X}$, deduciamo che la somma del problema vale $D=(1+2+\ldots+2023)\cdot 2^{2022}=2023\cdot 2024\cdot 2^{2021}$, una quantità divisibile per 7, 11, 23, 17 ma non per 19. Pertanto la risposta giusta è la **(E)**.

Quesito 10

Soluzione. La risposta è **(A)**: Barbara ha una strategia vincente che consiste in quanto segue.
Definiamo ogni configurazione di monete in base alla congruenza modulo 3 del numero di monete nella prima pila (0, 1, 2) e della parità del numero di monete nella seconda pila (P, D); così, ad esempio, la configurazione con 10 monete nella prima pila e 4 monete nella seconda si scrive (1,P). È chiaro che, per vincere, un giocatore, immediatamente prima dell'ultima mossa, deve per forza trovarsi in una configurazione del tipo (1,P), (2,P) oppure (0,D)*. Se Barbara riesce a fare in modo che Alberto non ci arrivi mai, ha la vittoria assicurata.
Osserviamo che Alberto parte da una configurazione iniziale del tipo (1,D), da cui può dare luogo, con una mossa, a una delle seguenti tre configurazioni: (1,P), (0,D), (2,D) (notiamo che nessuna di queste corrisponde a entrambe le pile vuote). Se Barbara si trova davanti la prima o la seconda delle tre, con la sua mossa può sicuramente portare Alberto a (0,P); se incontra la terza può senza dubbio effettuare la mossa che conduce a (1,D), riportando Alberto al punto di partenza. Se si verifica uno dei primi due casi, ossia se Alberto riceve la configurazione (0,P), gli è possibile, con una mossa, produrre una delle configurazioni (0,D), (2,P), (1,P) (anche qui nessuna delle tre corrisponde ad ambedue le pile vuote), dalle quali Barbara può sempre restituire ad Alberto la configurazione (0,P).
Di conseguenza, con questa strategia Alberto si troverà sempre davanti a configurazioni del tipo (1,D) oppure (0,P), ma nessuna delle due corrisponde alle tre configurazioni elencate sopra*, necessarie per vincere, dunque Barbara avrà la meglio.

Quesito 11

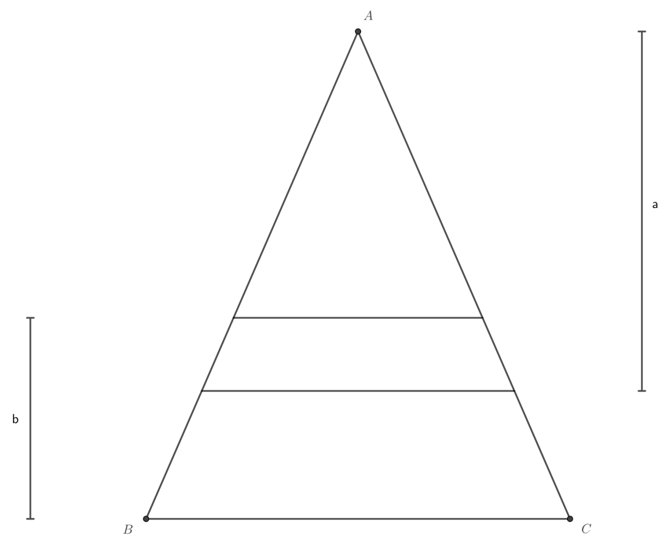
Soluzione. Dobbiamo fondamentalmente trovare l'altezza h relativa a BC nel triangolo ABC. Nella configurazione data si individuano facilmente due triangoli simili ad ABC. Da ciò si possono scrivere, in funzione di BC, a, b e h, le aree delle regioni interessate. In particolare, l'area di S_1 risulta essere

$$[S_1]=\frac{1}{2}BC\left(h-\frac{a^2}{h}\right)=\frac{BC\cdot(h^2-a^2)}{2h}$$

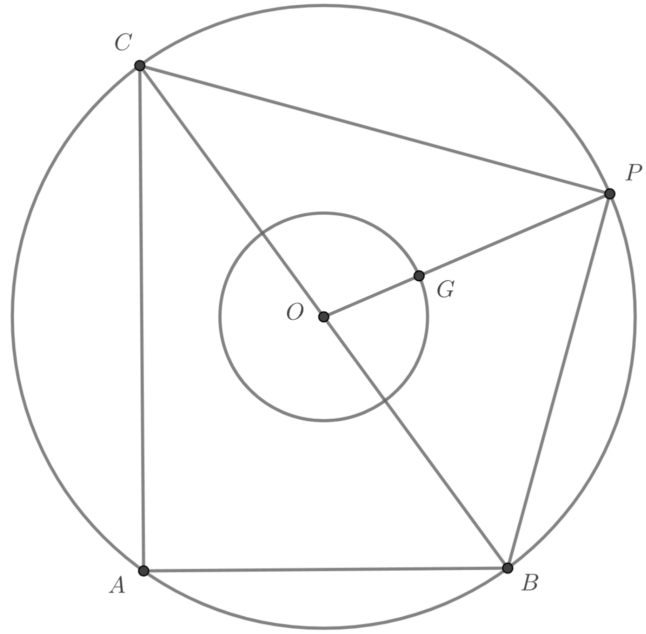
mentre l'area di T_2 è

$$[T_2]=\frac{1}{2}(h-b)\cdot\frac{BC\cdot(h-b)}{h}=\frac{BC\cdot(h-b)^2}{2h}.$$

Dunque $(h^2-a^2)=(h-b)^2$, da cui $h=\dfrac{a^2+b^2}{2b}$. La risposta è la **(A)**.

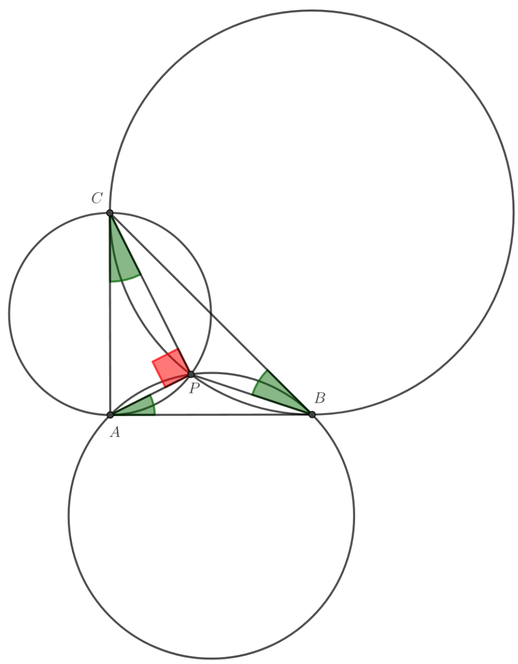


Quesito 12



Soluzione. Poiché P è situato sulla circonferenza circoscritta ad ABC, la sua distanza dal centro della circonferenza O è costante e, per il teorema del baricentro, lo è anche la distanza di G, baricentro di BCP, da O, la quale è pari a $\frac{1}{3}$. Ma allora il luogo dei punti dove si trova G è una circonferenza di raggio $\frac{1}{3}$ con centro in O e pertanto la lunghezza di AG varia tra $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{3}$, un intervallo di lunghezza $\frac{2}{3}$. La risposta è quindi la **(C)**.

Quesito 13



Soluzione. Osserviamo che, per costruzione, nei triangoli APB e BPC l'angolo in P vale $180° - 45° = 135°$, dunque $\angle APC = 360° - 2 \cdot 135° = 90°$. Inoltre, poiché evidentemente ABP e BCP sono simili, si ha

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PB}{AB\sqrt{2}} \Longrightarrow PB = 12\sqrt{2},$$

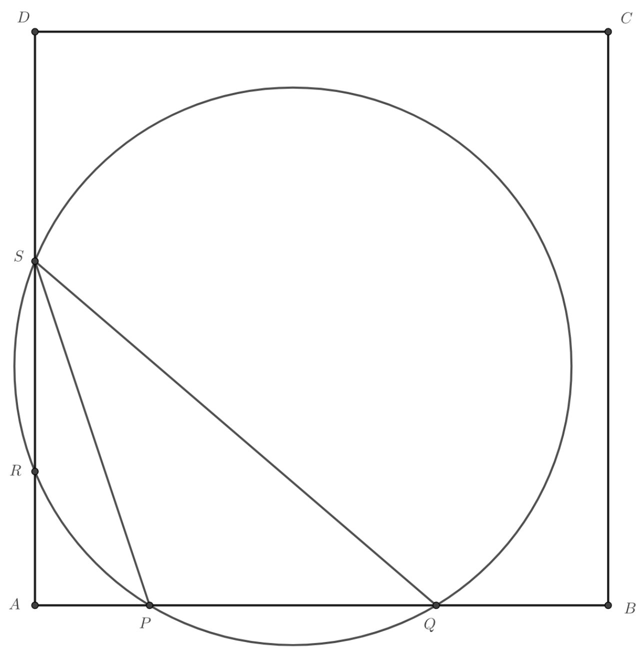
da cui

$$\frac{PC}{PB} = \frac{PB}{AP} \Longrightarrow PC = 24.$$

Da ciò otteniamo $AC^2 = 12^2 + 24^2 = 720$, che implica $[ABC] = \frac{1}{2}AC^2 = 360$. La risposta è la **(E)**.

Nota. È interessante osservare che, per via della condizione sugli angoli, il punto P è l'intersezione di tre circonferenze, ciascuna passante per uno dei vertici del triangolo ABC e tangente all'altro lato nel vertice successivo, come in figura. Di conseguenza, dal momento che $\angle BAC = 90°$, AC è diametro di una di queste circonferenze, dunque si ricava $\angle APC = 90°$ senza neppure fare la sottrazione.

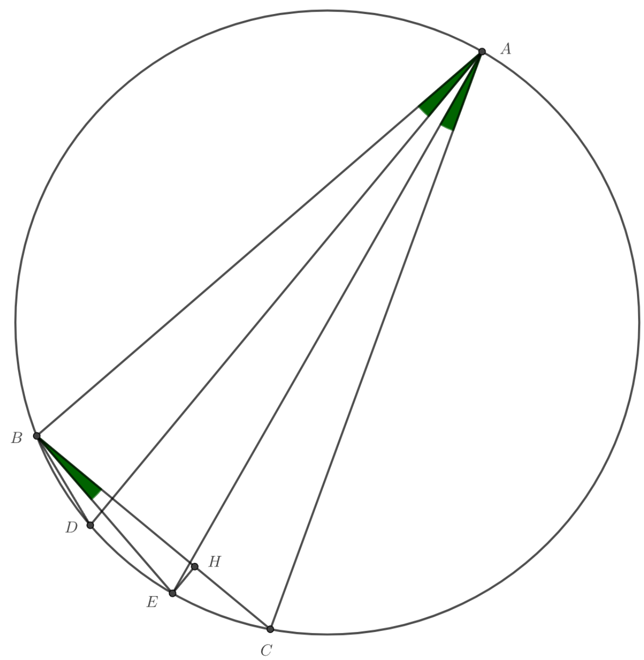
Quesito 14



Soluzione. Per differenza si trova facilmente che $AS = 6$, $PQ = 5$, da cui $QS = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85}$ e $PS = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$. Possiamo dunque utilizzare la nota formula secondo cui il raggio del circumcerchio di un triangolo è pari al prodotto dei lati del triangolo diviso per 4 volte la sua area, che vale $[PQS] = \frac{1}{2} PQ \cdot AS = 15$: il raggio ha valore $r = \frac{PQ \cdot QS \cdot PS}{4[PQS]} = \frac{5 \cdot \sqrt{85} \cdot 2\sqrt{10}}{60} = \frac{5\sqrt{34}}{6}$. Di conseguenza l'area del cerchio è $\mathcal{A} = \frac{425}{18}\pi$, quindi la risposta è la **(C)**.

Quesito 15

Soluzione. Facendo riferimento alla figura sottostante, dobbiamo sostanzialmente trovare la lunghezza di EH. Per farlo, notiamo che, siccome in un triangolo l'ortocentro e il circocentro sono coniugati isogonali, gli angoli $\angle BAD$ e $\angle CAE$ sono uguali, così come $\angle CBE$, insistendo esso su EC come $\angle CAE$. Chiameremo in seguito questo angolo θ. Per il teorema della corda si ha $BD = AE \sin\theta$, ossia $\sin\theta = \frac{1}{6}$. Da ciò si ricava che $EH = EB \sin\theta = \frac{1}{3}$, dunque la risposta è la **(A)**.



Quesito 16

Soluzione. L'equazione data si può riscrivere come $b^{2023} = c^2 - a^2 = (c+a)(c-a)$. Ora, se fosse per esempio $b = 2^n$, l'equazione sarebbe risolta se fossero vere le uguaglianze $c + a = 2^{2023n-1}$ e $c - a = 2$, ovvero $a = 2^{2023n-2} - 1$ e $c = 2^{2023n-2} + 1$. Dunque, per ogni n intero positivo, la terna $(2^{2023n-2}-1,\, 2^n,\, 2^{2023n-2}+1)$ è soluzione dell'equazione, che ha dunque infinite soluzioni. La risposta è la **(B)**.

Quesito 17

Soluzione. Ponendo $a = 7$ nell'equazione data si ottiene che il membro di sinistra è un multiplo di 8 e dunque anche b; perciò l'opzione **(A)** è errata.

Ponendo $a = 17^2$ e $b = (7^2 + 17^2) \cdot 17^4$ l'equazione risulta soddisfatta e b risulta divisibile per 17^4, dunque l'opzione **(B)** è sbagliata.

Ponendo $a = 2023$ e $b = 2023^2 \cdot (2023 + 1)$ l'equazione risulta soddisfatta e $2023^2 \mid b$, quindi anche la **(C)** è errata.

Se b fosse divisibile per 7^3, allora modulo 7^2 si otterrebbe $a^3 \equiv 0$, da cui $7 \mid a$. Di conseguenza $b - a^3 = 2023^2$ sarebbe divisibile per 7^3, assurdo. L'opzione **(D)** è dunque quella giusta.

Ponendo $a = 16$ si ottiene $b \equiv (-2)^2 - 9^3 \equiv 0 \pmod{25}$, perciò la **(E)** è sbagliata.

Quesito 18

Soluzione. Consideriamo l'equazione mod 41. Poiché 41 divide b ma non c, il membro di destra è congruo a 0. D'altra parte, il membro di sinistra contiene gli inversi modulari dei numeri da 1 a 40 (tranne $\frac{1}{40} \equiv 40$), i quali, essendo 41 primo, producono tutti resti diversi mod 41. La loro somma vale pertanto

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{39} \equiv \frac{40 \cdot 41}{2} - 40 \equiv 1 \pmod{41}.$$

Di conseguenza $\frac{1}{a} \equiv -1 \Longrightarrow a \equiv -1 \pmod{41}$ e l'unica delle opzioni che soddisfa questa condizione è $a = 2049$, cioè la **(A)**.

Quesito 19

Soluzione. Con veloci conti si trova che $13! = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Siccome la valutazione p-adica di $\frac{13!}{m}$, dove p è uno qualsiasi dei primi minori o uguali a 13, deve essere pari, si deve avere che $m = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, dove ciascuno tra x, y, z è minore o uguale del rispettivo esponente nella fattorizzazione di 13!, ovviamente con x, z pari e y dispari. Ne consegue che la somma di tutti gli m siffatti è

$$\begin{aligned} S &= (2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10})(3^1 + 3^3 + 3^5)(5^0 + 5^2) \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = \\ &= \frac{2^{12} - 1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{3^6 - 1}{8} \cdot 26 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 2 \cdot 4095 \cdot 91 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13^2 = \\ &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^4. \end{aligned}$$

La somma degli esponenti è pari a 12, quindi la risposta corretta è la **(E)**.

Quesito 20

Soluzione. Poiché a e 2024 sono coprimi, le potenze di a modulo 2024 sono periodiche. Il periodo termina con la potenza il cui esponente è l'ordine di a modulo 2024 e, dato che tutte le potenze di a nel periodo sono differenti, si deve avere proprio $r(a) = \mathrm{ord}_{2024}(a) = \mathrm{mcm}(\mathrm{ord}_8(a), \mathrm{ord}_{11}(a), \mathrm{ord}_{23}(a))$. È dunque sufficiente vedere quale delle opzioni non può soddisfare tale condizione.
Una prima osservazione, derivante dal teorema di Eulero, è che $\mathrm{ord}_8(a) \mid \phi(8) = 4$, $\mathrm{ord}_{11}(a) \mid \phi(11) = 10$ e $\mathrm{ord}_{23}(a) \mid \phi(23) = 22$. Da ciò si trova facilmente che $\mathrm{ord}_8(3) = 2$, $\mathrm{ord}_{11}(3) = 5$ e $\mathrm{ord}_{23}(3) = 11$ (in seguito ci riferiremo a questo fatto con il simbolo $*$).

Per ($*$), se esiste un a tale che $a \equiv 3$ (88) e $a \equiv 1$ (23), allora $\mathrm{ord}_{2024}(a) = 10$. Ma tale intero esiste sicuramente per il teorema cinese del resto (per esempio -965), dunque l'opzione **(A)** è errata.

Per ($*$), se esiste un a tale che $a \equiv 3$ (184) e $a \equiv 1$ (11), allora $\mathrm{ord}_{2024}(a) = 22$. Ma tale intero esiste sicuramente per il teorema cinese del resto (187 ne è un esempio), quindi anche la **(B)** è sbagliata.

Da $(*)$ si trova immediatamente che $\text{ord}_{2024}(3) = 110$, pertanto l'opzione **(C)** è sbagliata.

Per $(*)$, se esiste un a tale che $a \equiv 3$ (11) e $a \equiv 1$ (184), allora $\text{ord}_{2024}(a) = 5$. Ma tale intero esiste sicuramente per il teorema cinese del resto (553, ad esempio), dunque l'opzione **(D)** è errata.

Se esistesse un a tale che $\text{ord}_{2024}(a) = 44$ dovrebbe per forza succedere che $\text{ord}_8(a) = 4$. Gli unici casi in cui ciò potrebbe succedere sono $a \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod 8$. Tuttavia per $a \equiv 1$ l'ordine è 1, mentre per $a \equiv 3, 5, 7$ l'ordine è 2. Siamo pertanto giunti a una contraddizione, dunque la risposta corretta è la **(E)**.