# Stage Senior Pisa 2023 – Test Iniziale

| **Tempo concesso**: 150 minuti | **Valutazione**: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5 |
|---|---|

1. Sia $M$ il più piccolo numero reale tale che

$$ab^2c^3 \leq M(a^2+b^2+c^2)^3$$

per ogni terna $(a, b, c)$ di numeri reali positivi.
Determinare quale dei seguenti numeri è intero.

**(A)** $27M$ **(B)** $\frac{1}{M^2}$ **(C)** $\frac{1}{M^3}$ **(D)** $27M^3$ **(E)** $36M^3$

2. Determinare quale delle seguenti disuguaglianze è soddisfatta da almeno una terna $(a, b, c)$ di numeri *interi positivi.*

**(A)** $a + 3b^2 + 4c^3 \geq 5\sqrt{a^2+b^4+c^6}$ **(B)** $a + b + c \geq 2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

**(C)** $4(ab + bc + ca) \geq 5(a^2 + b^2 + c^2)$ **(D)** $54a^2b^2c^2 \geq (a^2 + 2b^2 + c^2)^3$

**(E)** $26abc \geq (a + b + c)^3$

3. Non è difficile verificare che l'equazione

$$2x^3 - 17x^2 + 23x - 4 = 0$$

ammette tre radici reali e positive, che indichiamo con $a$, $b$, $c$.
Determinare il volume del parallelepipedo che ha gli spigoli di lunghezza $a + 2$, $b + 2$, $c + 2$.

**(A)** 77 **(B)** 37 **(C)** 67 **(D)** 57 **(E)** 47

4. Consideriamo le seguenti tre equazioni funzionali (pensate per funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e supposte soddisfatte per ogni coppia $(x, y)$ di numeri reali):

$$xf(x+f(y)) = (x+2y)f(x), \quad f(x)f(y) = 2x^2 f(y) - 6y^2 + 9, \quad f(y-f(x)) = 3x - 4y + f(y).$$

- Alberto afferma: "esattamente una ammette almeno una soluzione iniettiva".
- Barbara afferma: "esattamente una ammette almeno una soluzione non surgettiva".
- Cristina afferma: "tutte ammettono almeno una soluzione".

Chi ha ragione?

**(A)** Nessuno **(B)** Solo Alberto **(C)** Tutti **(D)** Solo Alberto e Barbara

**(E)** Solo Alberto e Cristina

5. Sia $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ un polinomio a coefficienti interi. Sappiamo che gli unici interi $n$ tali che $p(n) = p(2)$ sono $n = 2$ e $n = 2023$.
Determinare quale delle seguenti affermazioni è *sicuramente falsa*.

**(A)** $b > 10^6$ **(B)** $a^2 < b$ **(C)** $p(2024) = 0$ **(D)** $p(1000) > p(2)$

**(E)** $4a + b < 0$

6. Sia $\mathbb{X} = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Un sottoinsieme di $\mathbb{X}$ rispetta il *distanziamento* se non contiene coppie di interi consecutivi. Ad esempio, il sottoinsieme vuoto e i sottoinsiemi $\{5\}$ e $\{1, 3, 7\}$ rispettano il distanziamento, mentre $\{2, 4, 5\}$ non lo rispetta.
Determinare quanti sono i sottoinsiemi di $\mathbb{X}$ che rispettano il distanziamento.

**(A)** 164 **(B)** 154 **(C)** 174 **(D)** 134 **(E)** 144

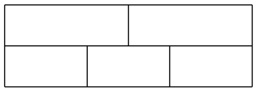
7. Sono date 100 rette distinte nel piano, a due a due incidenti. Sappiamo che

- esistono esattamente 3 punti del piano per cui passano esattamente 3 delle rette,
- esistono esattamente 4 punti del piano per cui passano esattamente 4 delle rette,
- esistono esattamente 5 punti del piano per cui passano esattamente 5 delle rette,
- esistono esattamente 6 punti del piano per cui passano esattamente 6 delle rette,
- non esistono punti del piano per cui passano 7 o più delle rette.

Sia $N$ il numero dei punti del piano per cui passano esattamente 2 delle rette.
Determinare quale dei seguenti primi divide $N$.

**(A)** 11 **(B)** 7 **(C)** 13 **(D)** 17 **(E)** 5

8. Nella figura qui sotto è rappresentato un rettangolo diviso in cinque zone.



Abbiamo a disposizione cinque colori diversi con i quali vogliamo colorare le cinque zone. Possiamo usare un colore anche più volte (quindi non siamo costretti ad utilizzare tutti i colori), ma non possiamo utilizzare lo stesso colore per zone che confinano.
Detto $C$ il numero delle colorazioni che rispettano queste condizioni, determinare quanti sono i divisori (positivi) di $C$.

**(A)** 16 **(B)** 24 **(C)** 14 **(D)** 32 **(E)** 28

9. Sia $\mathbb{X} = \{1, 2, \ldots, 2023\}$, e sia $\mathcal{P}_*(\mathbb{X})$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{X}$. Per ogni $A \in \mathcal{P}_*(\mathbb{X})$ indichiamo con $s(A)$ la somma degli elementi di $A$. Poniamo infine

$$D = \sum_{A \in \mathcal{P}_*(\mathbb{X})} s(A).$$

Determinare quale dei seguenti primi *non* divide $D$.

**(A)** 7 **(B)** 11 **(C)** 23 **(D)** 17 **(E)** 19

10. Alberto e Barbara giocano con due pile che inizialmente contengono entrambe $2023^{2023}$ monete. Ad ogni mossa un giocatore ha tre possibilità: togliere una moneta dalla prima pila, togliere due monete dalla prima pila, togliere una moneta dalla seconda pila. Inizia Alberto, poi si prosegue a turno. Vince chi toglie l'ultima moneta.
Determinare cosa deve fare Alberto alla prima mossa se vuole essere sicuro di vincere, pur di giocare bene alle mosse successive.

**(A)** Non può fare nulla, poiché Barbara ha una strategia vincente

**(B)** Deve togliere una moneta dalla prima pila

**(C)** Deve togliere una moneta dalla seconda pila **(D)** Può fare quello che vuole

**(E)** Deve togliere due monete dalla prima pila

11. Sia $ABC$ un triangolo isoscele con $AB = AC$.
Tracciando la parallela alla retta $BC$ a distanza $a$ da $A$ dividiamo $ABC$ in un triangolo $T_1$ ed un trapezio $S_1$. Tracciando la parallela alla retta $BC$ a distanza $b$ da $BC$ dividiamo $ABC$ in un triangolo $T_2$ ed un trapezio $S_2$.
Sapendo che $\text{Area}(S_1) = \text{Area}(T_2)$, determinare la distanza di $A$ dalla retta $BC$.

**(A)** $\dfrac{a^2+b^2}{2b}$ **(B)** $a+b$ **(C)** $\dfrac{a^2+b^2}{a}$ **(D)** $\sqrt{a^2+b^2}$ **(E)** $\dfrac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

12. Sia $ABC$ un triangolo, rettangolo in $A$, inscritto in una circonferenza $\omega$ di raggio unitario. Sia $P$ un punto variabile su $\omega$, diverso da $B$ e $C$. Al variare di $P$, calcoliamo la distanza di $A$ dal baricentro di $PBC$.
L'insieme dei possibili valori di tale distanza è un intervallo di lunghezza ...

**(A)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(E)** 1

13. Sia $ABC$ un triangolo isoscele, rettangolo in $A$. Supponiamo che esista un punto $P$ interno al triangolo tale che

$$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA \qquad \text{e} \qquad AP = 12.$$

Determinare l'area del triangolo $ABC$.

**(A)** 420 **(B)** 480 **(C)** 384 **(D)** 408 **(E)** 360

14. Sia $ABCD$ un quadrato di lato 10. Una circonferenza interseca il lato $AB$ in due punti $P$ e $Q$ tali che $AP = 2$ e $BQ = 3$. La stessa circonferenza interseca il lato $AD$ in due punti $R$ ed $S$ con $DS = 4$.
Determinare l'area del cerchio delimitato dalla circonferenza.

**(A)** $\frac{313}{16}\pi$ **(B)** $\frac{85}{4}\pi$ **(C)** $\frac{425}{18}\pi$ **(D)** $25\pi$ **(E)** $16\pi$

15. Sia $\omega$ la circonferenza circoscritta ad un triangolo $ABC$. L'altezza uscente da $A$ interseca nuovamente $\omega$ in $D$. Sia $E$ tale che $AE$ è un diametro di $\omega$. Sappiamo che il raggio di $\omega$ è 3, che $EB = 2$ e $BD = 1$.
Determinare la distanza di $E$ dal lato $BC$.

**(A)** $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{2}{7}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{2}{5}$ **(E)** $\frac{1}{5}$

16. Determinare quante sono le terne di interi positivi $(a, b, c)$ tali che

$$a^2 + b^{2023} = c^2.$$

**(A)** 1 **(B)** Infinite **(C)** Più di una, ma non più di 10 **(D)** Nessuna

**(E)** Un numero finito maggiore di 10

17. Siano $a$ e $b$ interi positivi tali che
$$2023^2 + a^3 = b.$$
Determinare quale dei seguenti numeri *di sicuro non divide* $b$.

**(A)** $2^3$ **(B)** $17^4$ **(C)** $2023^2$ **(D)** $7^3$ **(E)** $5^2$

18. Siano $a$, $b$, $c$ tre interi positivi tali che
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{39} + \frac{1}{a} = \frac{b}{c}.$$
Sappiamo che $b$ è divisibile per 41, mentre $c$ non lo è.
Determinare quale dei seguenti numeri può essere $a$.

**(A)** 2049 **(B)** 2039 **(C)** 2019 **(D)** 2009 **(E)** 2029

19. Sia $S$ la somma di tutti gli interi positivi $m$ tali che $\dfrac{13!}{m}$ è un quadrato perfetto. È ben noto che $S = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f$ per opportuni interi positivi $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$.
Determinare $a + b + c + d + e + f$.

**(A)** 13 **(B)** 15 **(C)** 14 **(D)** 16 **(E)** 12

20. Per ogni intero $a$ relativamente primo con 2024, indichiamo con $r(a)$ il numero dei possibili resti che si ottengono quando si dividono per 2024 tutte le potenze di $a$ con esponente intero positivo.
Allora $r(a)$ è sicuramente diverso da...

**(A)** 10 **(B)** 22 **(C)** 110 **(D)** 5 **(E)** 44