Combinatoria – Problemi di ammissione

C1. Alberto e Barbara giocano su una tabella 3×2021, inizialmente bianca. Inizia Alberto. Ad ogni turno, il giocatore a cui tocca muovere deve annerire due caselle, non necessariamente adiacenti, che stiano sulla stessa riga o sulla stessa colonna. Perde il giocatore che non può più muovere. Chi ha una strategia vincente?

C2. Un insieme L di rette del piano a 3 a 3 mai concorrenti è detto *dispari* se ogni sua retta interseca un numero dispari di altre rette di L.

(a) Dimostrare che un insieme di rette del piano a 3 a 3 mai concorrenti può sempre essere esteso a un insieme dispari.

(b) Per ogni intero positivo n, determinare il minimo intero non-negativo k tale che ogni insieme di n rette del piano a 3 a 3 mai concorrenti può essere esteso (aggiungendo altre rette) a un insieme dispari con al più $n + k$ rette.

C3. Un segmento del piano è detto *domestico* se è parallelo a uno degli assi cartesiani e dista un numero intero da questo, altrimenti è detto *selvatico*. Siano m, n interi positivi dispari. Il rettangolo $[0, m] \times [0, n]$ è partizionato in finiti triangoli tali che:

(a) ogni triangolo ha almeno un lato domestico;

(b) l'altezza relativa a ogni lato domestico di un triangolo è 1;

(c) ogni lato selvatico è in comune a esattamente due triangoli.

Dimostrare che almeno due triangoli hanno due lati domestici.