Stage Senior Pisa 2022 – Test Iniziale

Tempo concesso: 150 minuti	**Valutazione**: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5

1. Sia M il più piccolo numero reale tale che

$$\frac{x(2^x - 3x)}{4^x} \leq M \qquad \forall x > 0.$$

Determinare quale dei seguenti numeri è intero.

(A) $24M$ **(B)** $10M$ **(C)** $18M$ **(D)** $25M$ **(E)** $35M$

2. Sia x un numero reale tale $x + x^{-1} = \sqrt{7}$.
Determinare $x^6 + x^{-6}$.

(A) 110 **(B)** 100 **(C)** 120 **(D)** 130 **(E)** 140

3. Consideriamo il numero complesso $z = 2 + i$. Per ogni intero $n \geq 0$ consideriamo gli interi a_n e b_n tali che $z^n = a_n + b_n i$.
Determinare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n b_n}{7^n}.$$

(A) $\frac{7}{16}$ **(B)** $\frac{3}{8}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{9}{16}$ **(E)** $\frac{4}{7}$

4. Per ogni intero positivo n, consideriamo l'insieme $\mathcal{S}(n)$ costituito da tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(f(x) + yf(y)) = x + f(y)^n$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

- Alberto afferma: "tutti gli elementi di $\mathcal{S}(2)$ sono funzioni surgettive".
- Barbara afferma: "l'insieme $\mathcal{S}(2)$ ha infiniti elementi".
- Cristina afferma: "l'insieme $\mathcal{S}(3)$ è vuoto".

Chi ha ragione?

(A) Solo Alberto e Cristina **(B)** Tutti **(C)** Solo Alberto **(D)** Nessuno

(E) Solo Alberto e Barbara

5. Sia
$$P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 32$$
un polinomio a coefficienti reali. Sappiamo che, per ogni radice (eventualmente complessa) r di $P(x)$, anche
$$r \cdot \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$
è radice di $P(x)$.
Determinare quale delle seguenti affermazioni è *sicuramente* falsa.

(A) $a = 2$ **(B)** $a = 4$ **(C)** $a = -2$ **(D)** $d = 32$ **(E)** $d = -16$

6. Una *tabella binaria allineata* è una tabella 3×3 in cui valgono le seguenti 3 condizioni:

- ognuna delle 9 caselle contiene la cifra 0 oppure la cifra 1,
- esistono almeno tre cifre 1 sulla stessa riga o sulla stessa colonna,
- esistono almeno tre cifre 0 sulla stessa riga o sulla stessa colonna.

Determinare quante sono le tabelle binarie allineate.

(A) 84 **(B)** 96 **(C)** 72 **(D)** 120 **(E)** 108

7. Una parola si dice *pronunciabile* se non contiene due consonanti consecutive.
Determinare quanti sono gli anagrammi pronunciabili della parola “MATEMATICA”.

(A) 3600 **(B)** 2400 **(C)** 4000 **(D)** 4800 **(E)** 3000

8. Una rana compie dei salti tra i vertici di un quadrato. Quando la rana si trova in un certo vertice, sceglie a caso con uguale probabilità uno dei restanti 3 vertici verso cui dirigersi. Sia p la probabilità che, dopo 6 salti, la rana si trovi nuovamente nel vertice in cui stava inizialmente.
Scritta p come frazione irriducibile a/b, determinare il valore di a.

(A) 61 **(B)** 71 **(C)** 81 **(D)** 91 **(E)** 101

9. Sulla lavagna sono scritti inizialmente tre interi positivi a due a due *distinti*. Ogni minuto Sam cancella i tre numeri a, b, c presenti in quel momento sulla lavagna, e li rimpiazza simultaneamente con $(a+b)/2$, $(b+c)/2$, $(c+a)/2$. Dopo aver eseguito l'operazione 2022 volte, i numeri scritti sulla lavagna sono ancora interi.
Detto S il minimo valore possibile per la somma dei 3 numeri finali, determinare quale dei seguenti primi divide S.

(A) 13 **(B)** 7 **(C)** 11 **(D)** 2 **(E)** 17

10. Alberto e Barbara giocano con una pila che inizialmente contiene 2022^{2022} monete. Inizia Alberto, poi si prosegue a turno. Quando tocca ad Alberto, lui può togliere (a sua scelta) 1, 3 o 5 monete dalla pila. Quando tocca a Barbara, lei può togliere (a sua scelta) 2 o 4 monete dalla pila. Perde chi non ha più a disposizione delle mosse valide.
Determinare quale delle seguenti affermazioni è corretta.

(A) Alberto ha una strategia vincente, ed alla prima mossa può fare quello che vuole

(B) Alberto ha una strategia vincente, ma alla prima mossa deve togliere 1 moneta

(C) Alberto ha una strategia vincente, ma alla prima mossa deve togliere 3 monete

(D) Alberto ha una strategia vincente, ma alla prima mossa deve togliere 5 monete

(E) Barbara ha una strategia vincente

11. Sia $ABCD$ un quadrato di lato unitario. Sia M il punto medio del lato CD, e sia P l'ulteriore intersezione tra la retta AM e la circonferenza inscritta nel quadrato.
Determinare quale dei seguenti numeri è intero.

(A) $20\,AP^2$ **(B)** $18\,AP^2$ **(C)** $16\,AP^2$ **(D)** $4\,PM^2$ **(E)** $6\,PM^2$

12. Sia ABC un triangolo scaleno, con ortocentro H, baricentro G ed incentro I.
Determinare quale dei seguenti punti *non* sta necessariamente sulla circonferenza circoscritta ad ABC.

(A) Il simmetrico di A rispetto a G **(B)** Il simmetrico di H rispetto al lato AB

(C) Il simmetrico di H rispetto al punto medio di AB **(D)** Il circocentro di ABI

(E) L'intersezione tra l'asse di AB e la bisettrice esterna dell'angolo in C

13. Sia ABC un triangolo scaleno. La bisettrice interna dell'angolo in C interseca il lato AB in D. La bisettrice esterna dell'angolo in C interseca la retta AB in E.
Allora CD è una mediana del triangolo ECB se e solo se ...

(A) $CB = 3\,CA$ **(B)** $CB = 2\,CA$ **(C)** $AB = 3\,CA$ **(D)** $AB = 4\,CA$

(E) $AC + CB = 2\,AB$

14. Sia ω una circonferenza con centro in un punto O. Siano A e B due punti distinti di ω, fissati una volta per tutte, e sia M il punto medio del segmento AB. Sia P un punto variabile su ω, diverso da A e B.
Al variare di P, il baricentro di APB sta su una circonferenza ...

(A) con centro nel baricentro di AOB **(B)** con centro in O

(C) con centro nel punto medio di OM **(D)** passante per A e B

(E) tangente alla retta AB

15. Sia ABC un triangolo con $AB = 8$, $AC = 6$ e area uguale a 22. Sia D il punto sul lato AB tale che $AD = 2$. Sia E il punto sul lato AC tale che $AE = 2$. Sia F l'intersezione delle rette BE e CD.
Determinare l'area del quadrilatero $ADFE$.

(A) $\frac{17}{6}$ **(B)** $\frac{30}{11}$ **(C)** $\frac{8}{3}$ **(D)** $\frac{14}{5}$ **(E)** $\frac{26}{9}$

16. Siano a, b, c tre divisori di 18^9 scelti a caso (si intende che ogni divisore ha la stessa probabilità di essere scelto, che le tre scelte sono tra di loro indipendenti, e che ovviamente lo stesso divisore può essere scelto anche più volte). Sia p la probabilità che accada simultaneamente che a divide b, il quale a sua volta divide c.
Scritta p come frazione irriducibile m/n, determinare quale dei seguenti primi *non* divide il prodotto $m \cdot n$.

(A) 17 **(B)** 5 **(C)** 7 **(D)** 11 **(E)** 19

17. Determinare *quante* sono le coppie (a, b) di interi *positivi* con b *dispari* tali che

$$\frac{1}{a} - \frac{2}{b} = \frac{1}{49}.$$

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** 4 **(E)** 5

18. Sia n il più piccolo intero tale che

$$3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7 \qquad \text{divide} \qquad 149^n - 2^n.$$

Determinare quanti sono i divisori positivi di n.

(A) 270 **(B)** 360 **(C)** 105 **(D)** 192 **(E)** 324

19. Determinare *quante* sono le terne (a, b, c) di numeri interi tali che $1 \leq a \leq b \leq c$ e

$$2^a + 2^b + 2^c + 3$$

è un quadrato perfetto.

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 0

20. Consideriamo l'equazione

$$a^{2022} = b^2 + 2023\,c,$$

con a, b, c numeri interi, non necessariamente positivi.
Determinare quale delle seguenti affermazioni è *falsa*.

(A) Esistono soluzioni con $b = 2021$

(B) Esistono soluzioni con $a = 2021$

(C) Esistono soluzioni con $b = 1014$

(D) Esistono soluzioni con $a = 1014$

(E) Se b è multiplo di 7, allora anche c è multiplo di 7