Allenamenti EGMO 2022

22 aprile 2022

Indice

1 Allenamenti EGMO 2022 – 1

A1. Dimostra che per ogni $r > 2$ reale positivo esistono esattamente 2 o 3 numeri reali positivi tali che:

$$x^2 = r \cdot \lfloor x \rfloor$$

C1. Sabrina ha $2 \cdot n$ numeri interi positivi. Vuole dividerli in n coppie disgiunte. Una suddivisione così fatta si dice *bella* se per ogni coppia il prodotto dei due numeri non è mai un quadrato perfetto. Mostrare che se esiste una suddivisione bella, allora ne esistono almeno $n!$.

G1. Sia ABC un triangolo. H è il suo ortocentro e D, E ed F sono i piedi delle altezze rispettivamente dei vertici A, B e C. Chiamiamo F' il simmetrico di F rispetto a B, ed E' il simmetrico di E rispetto a C. Sia X il secondo punto di intersezione della circonferenza circoscritta al triangolo $AF'E'$ con la retta AD. Mostrare che $HX = 4 \cdot HD$.

N1. Sia $n \geq 3$ intero e siano $a_1, a_2, \ldots a_n$, n numeri naturali primi tra loro (ovvero si ha $\text{MCD}(a_1, a_2, \ldots a_n) = 1$, e non necessariamente coprimi a due a due) tali che $\text{mcm}(a_1, a_2, \ldots a_n)$ divide $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Mostrare che $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ divide $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{n-2}$.

1.1 Soluzioni

A1 Dato che x è reale positivo, $\lfloor x \rfloor$ è un intero positivo o nullo. Se x verifica l'equazione per un qualche r, supponiamo per assurdo che $\lfloor x \rfloor = 0$: varrebbe $x^2 = r \cdot \lfloor x \rfloor = 0$ che è assurdo. Dunque $\lfloor x \rfloor$ è un intero positivo.

Se fissiamo il valore di $\lfloor x \rfloor = n$, c'è al massimo una soluzione per x – deve valere $x = \sqrt{rn}$, che funziona se e solo se $n \leq \sqrt{rn} < n + 1$. Diciamo che n è *buono* se soddisfa questa equazione.

Lemma 1: Se $r - 2 < n \leq r$, allora n è buono.

Dimostrazione del lemma 1. $r \geq n$ quindi $\sqrt{rn} \geq n$, mentre $r < n + 2$ quindi $\sqrt{rn} < \sqrt{n(n+2)} < n + 1$.

Lemma 2: Se n è buono, allora $r - 3 < n \leq r$.

Dimostrazione del lemma 2. Chiaramente se $r < n$ allora $\sqrt{rn} < n$, quindi n non può essere buono. D'altra parte, se $r \geq n + 3$, allora

$$\sqrt{rn} \geq \sqrt{n(n+3)} \geq \sqrt{n^2 + 2n + 1} = n + 1,$$

dato che $n \geq 1$, assurdo.

Ci sono esattamente 2 interi nell'intervallo $(r - 2, r]$, ed esattamente 3 interi nell'intervallo $(r - 3, r]$, quindi questo implica che ci sono almeno 2 e al massimo 3 buoni n, e perciò 2 o 3 soluzioni per x. $\square$

C1 Chiamiamo *carina* una coppia di numeri il cui prodotto non è un quadrato perfetto. Una suddivisione è quindi bella se composta da coppie carine.

Lemma: Se (a, b) e (c, d) coppie carine, allora si ha almeno uno tra:

- (a, c) e (b, d) carine, o
- (a, d) e (b, c) carine.

Dimostrazione del lemma. Supponiamo per assurdo che sia (a, c) che (a, d) non siano carine.

Allora ac è un quadrato perfetto, così come ad. Un prodotto di quadrati è un quadrato, quindi $ac \cdot ad = a^2cd$ è un quadrato, e quindi cd è un quadrato (essendo $a \neq 0$).

Ma per ipotesi avevamo (c, d) carina, e quindi si ha un assurdo.

Abbiamo quindi che almeno una tra (a, c) e (a, d) è carina.

In modo analogo, almeno una tra (b, d) e (b, c) è carina, almeno una tra (a, c) e (b, c), e almeno una tra (b, d) e (a, d).

Se, quindi, una delle quattro coppie (senza perdita di generalità (a, c)) non è carina, si deve avere che le due coppie (a, d) e (b, c) sono carine, da cui la tesi.

$\square$

Supponiamo ora di avere una suddivisione bella $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)\}$, e dimostriamo per induzione su n che ne esistono almeno $n!$.

Passo base: $1! = 1$, quindi il caso $n = 1$ è banale.

Passo induttivo: $n \Rightarrow n + 1$

Scegliamo un numero i tra 1 ed $n + 1$, possiamo farlo in $n + 1$ modi diversi. Vogliamo far vedere che per ogni scelta di i ci sono $n!$ suddivisioni belle.

Ci sono due casi:

- Se $i = n+1$, lasciamo fissa la coppia (a_{n+1}, b_{n+1}) e permutiamo gli altri $2n$ numeri. Per ipotesi induttiva ci sono almeno $n!$ suddivisioni belle.
- Se $i \neq n + 1$, consideriamo le coppie (a_i, b_i) e (a_{n+1}, b_{n+1}). Dal lemma sappiamo che (a_i, a_{n+1}) e (b_i, b_{n+1}) sono carine, oppure (a_i, b_{n+1}) e (b_i, a_{n+1}) sono carine.

  Supponiamo senza perdita di generalità di essere nel primo caso. Allora lasciamo fissa la coppia (a_i, a_{n+1}); i restanti $2n$ numeri formano una suddivisione bella $\{(a_1, b_1), \ldots, (a_{i-1}, b_{i-1}), (b_{n+1}, b_i), (a_{i+1}, b_{i+1}), \ldots, (a_n, b_n)\}$ e per ipotesi induttiva esistono almeno $n!$ suddivisioni belle permutando questi numeri.

Allora esistono almeno $(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$ suddivisioni belle.

G1 Chiamiamo Γ la circonferenza circoscritta al triangolo ABC e γ la circonferenza circoscritta al triangolo $AE'F'$. Innanzitutto sappiamo che la retta AD contiene il simmetrico dell'ortocentro rispetto al punto D, che chiamiamo D'. D' appartiene alla circonferenza circoscritta al triangolo ABC. La tesi è equivalente quindi a dimostrare che $HX = 4 \cdot HD = 2 \cdot HD'$ o che $D'X = D'H$.

Notiamo che i punti A, E, H e F sono conciclici, poiché $\angle AEH = \frac{\pi}{2} = \angle AFH$. Indichiamo con ω la circonferenza passante per questi quattro punti.

Sia S il secondo punto di intersezione di Γ e ω. Mostriamo che il punto S appartiene a γ, provando che è il centro della similitudine che manda i punti B e C nei punti F' e E'. Per questo è sufficiente dimostrare che i triangoli SBF' e SCE' sono simili. Vogliamo quindi provare che $\frac{SC}{SB} = \frac{CE'}{BF'}$ e che $\angle E'CS = \angle F'BS$. Sappiamo che il punto S è il centro della similitudine che manda i punti E ed F nei punti C e B, quindi i triangoli SBF e SCE sono simili, quindi

$$\frac{SC}{SB} = \frac{CE}{BF} = \frac{CE'}{BF'}$$

e

$$\angle E'CS = \pi - \angle ECS = \pi - \angle FBS = F'BS$$

che ci permette di concludere che S appartiene a γ.

Il punto S è quindi il centro della similitudine che manda i punti F, H ed E nei punti B, D' e C. è anche il centro della similitudine che invia i punti B, D' e C nei punti F', X ed E'. Abbiamo quindi le seguenti uguaglianze:

$$\tfrac{D'X}{BF'} = \tfrac{SD'}{SB} = \tfrac{HD'}{BF}$$

per il fatto che i triangoli SBF' e $SD'X$ sono simili e che i triangoli SFB e SHD' sono simili.

Quindi, $\frac{HD'}{D'X} = \frac{BF}{BF'} = 1$ che dà il risultato desiderato. □

N1 Sia p un numero primo. Chiamiamo *valutazione p-adica* $v_p(m)$ di m l'esponente della massima potenza di p che divide m.

Ad esempio, $v_2(4) = v_2(12) = 2$, mentre $v_2(15) = 0$ e $v_2(8) = 3$.

Per definizione di minimo comune multiplo:

$$v_p(\text{mcm}(a_1, a_2, \ldots a_n)) = \max(v_p(a_1), v_p(a_2), \ldots v_p(a_n)) \tag{1}$$

Mentre:

$$v_p(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n) = v_p(a_1) + v_p(a_2) + \ldots + v_p(a_n) \tag{2}$$

E:

$$v_p(m^{n-2}) = (n-2) \cdot v_p(m) \tag{3}$$

L'ipotesi $\text{MCD}(a_1, a_2, \ldots a_n) = 1$ ci dice che, per ogni p, almeno uno tra i $v_p(a_i)$ è 0 (altrimenti tutti gli a_i sarebbero divisibili per p).

L'ipotesi $\text{mcm}(a_1, a_2, \ldots a_n) \mid a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ci dice che per ogni p:

$$v_p(\text{mcm}(a_1, a_2, \ldots a_n)) = \max(v_p(a_1), v_p(a_2), \ldots v_p(a_n)) \leq v_p(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \tag{4}$$

Dimostrare la tesi significa dimostrare che per ogni p:

$$v_p(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n) \overset{?}{\leq} v_p((a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{n-2}) \tag{5}$$

ovvero:

$$v_p(a_1) + v_p(a_2) + \ldots + v_p(a_n) \overset{?}{\leq} (n-2) \cdot v_p(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \tag{6}$$

Sappiamo che per qualche i: $v_p(a_i) = 0$.

- Supponiamo che questo succeda per esattamente uno degli a_i, senza perdita di generalità a_1.

  Allora $p \nmid a_1$, $p \mid a_2, \dots, a_n$, quindi $p \nmid a_1+a_2+\ldots+a_n$, ovvero $v_p(a_1+a_2+\ldots+a_n) = 0$.

  Per ipotesi abbiamo la **??** e quindi $v_p(a_i) = 0$ per ogni i, ovvero p non divide nessun a_i, e la tesi **??** è vera.

- Supponiamo che questo succeda per almeno due degli a_i, senza perdita di generalità a_1 e a_2.

  Allora $v_p(a_1) + v_p(a_2) + v_p(a_3) + \ldots + v_p(a_n) = v_p(a_3) + \ldots + v_p(a_n)$.

  Dalla **??** sappiamo che ogni $v_p(a_i)$ è minore o uguale a $v_p(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, quindi:

$$v_p(a_3) + \ldots + v_p(a_n) \leq v_p(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \ldots + v_p(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \\ = (n-2) \cdot v_p(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \quad (7)$$

  e la tesi è vera.