OliMaTO 8

Simulazione Gara Nazionale a Squadre 2022

- Per ogni problema indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- Alcuni problemi ritenuti più impegnativi dagli autori sono contrassegnati da una o due stelle ([$\star$] o [$\star\star$]).
- Di seguito sono riportati alcuni valori approssimati utili nello svolgimento dei calcoli:

$$\sqrt{2} \approx 1,4142 \qquad \sqrt{3} \approx 1,7321 \qquad \sqrt{5} \approx 2,2360 \qquad \sqrt{7} \approx 2,6458 \qquad \pi \approx 3,1415$$

- **10 minuti dall'inizio:** scadenza per la scelta del problema jolly (dopo verrà assegnato il problema 1).
- **30 minuti dall'inizio:** scadenza per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio:** fine della gara.

Gara scritta da: Matteo Protopapa, Matteo Rossi, Federico Tiberga, Michele Trosso, Riccardo Zanotto
Ambientazione a cura di: Federico Tiberga

1. *Intro*, Il salvataggio

Un terribile temporale ha colpito la cittadina dove vive Andy e, purtroppo, la macchina RC è rimasta chiusa fuori casa. Capitanati dallo sceriffo Woody, gli altri giocattoli (fra cui lo space ranger Buzz Lightyear, la bambola di porcellana Bo Peep, il tirannosauro Rex e un intero esercito di soldatini) riescono a portare in salvo l'amica. Per festeggiare, Rex versa un bicchiere a tutti gli N giocattoli di Andy, e nel farlo si accorge che N coincide con le ultime 4 cifre del 2022-esimo numero intero non negativo che si scrive solo con cifre 2 e 0. Quanti bicchieri riempie il dinosauro?

Soluzione: la risposta è 202. Ci basta notare che il numero cercato è il numero 2021 scritto in binario le cui cifre 1 vanno cambiate con cifre 2. Dato che $2021 = (11111100101)_2$, la soluzione è 22222200202.

2. *Intro*, La vendita di Bo Peep

I festeggiamenti sono interrotti da un uomo intenzionato a comprare Bo Peep dalla famiglia di Andy e la sua offerta è troppo alta per non essere accettata: egli è infatti disposto a spendere n dollari pur di averla, dove n è la somma di tutti i numeri primi $p > 7$ tali che p divida $(p-5)^{p-5} - (p-7)^{p-7}$. I giocattoli provano a liberarla, ma lei, capendo di non essere più adatta per Andy, accetta il suo destino e saluta per un'ultima volta i suoi amici. Dopo l'addio Buzz, ancora sconvolto, si chiede quanto abbia speso realmente la figura misteriosa.

Soluzione: la risposta è 0076. Per il piccolo teorema di Fermat abbiamo che $(p-5)^{p-5} \equiv (-5) \cdot (-5)^{-5} \pmod p$ e similmente per $p-7$; pertanto la condizione $(p-5)^{p-5} \equiv (p-7)^{p-7} \pmod p$ si traduce in $7^6 \equiv 5^4 \pmod p$.
I primi che soddisfano sono tutti e soli quelli che dividono $7^6 - 5^4 = (343+25)(343-25) = 2^5 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 53$; la somma di quelli maggiori di 7 è $23 + 53 = 76$.

3. Lo zaino di Bonnie

Nove anni più tardi, Andy è ormai cresciuto e ha donato tutti i suoi giocattoli a un'altra bambina, Bonnie. Woody rimane subito colpito dal suo bellissimo zaino, ottenuto da un tetraedro regolare di volume 3537 al quale è stato rimosso da ciascun vertice un altro tetraedro regolare in modo che le facce rimanenti siano solamente triangoli equilateri ed esagoni regolari. Intrufolatosi al suo interno per ispezionarlo meglio, lo sceriffo viene erroneamente portato all'asilo della bambina. Intanto, per passare il tempo, Woody calcola il volume dello zaino. Quanto vale questo volume?

Soluzione: la risposta è 3013. Si vede facilmente che affinchè le facce dello zaino siano poligoni regolari, l'altezza dei tetraedri da rimuovere è un terzo dell'altezza del tetraedro iniziale, pertanto il volume di uno solo di essi è $\frac{1}{27}$ del volume iniziale. Il volume del solido restante risulta pertanto $\frac{27-4}{27} \cdot 3537 = 3013$.

4. Attività scolastiche

Malgrado i suoi tentativi, Bonnie non riesce a fare amicizia con nessuno a scuola. In effetti, gli altri bambini sono un po' strani: alcuni dicono sempre il vero ed altri mentono sempre. Un giorno, per gioco, tutti i 2022 bambini si mettono in cerchio intorno ad una scatola. Il primo dichiara che nella scatola c'è un numero pari di ciucci, il secondo dichiara che c'è un numero di ciucci multiplo di 3 e così via. Bonnie, inorridita dalla scena, si allontana; Woody, invece, sa che solamente 13 dei bambini dicono la verità e si domanda quanti ciucci contenga al minimo la scatola.

Soluzione: la risposta è 0192. Notiamo che se i bambini che dicono la verità sono 13, allora il numero di ciucci nella scatola ha 13 divisori maggiori di 1, quindi è della forma p^{13} oppure $p^6 q$ con p, q primi. Chiaramente conviene prendere $p = 2$ e $q = 3$, da cui la risposta.

5. Creato con tanto amore

Per non rimanere sola a scuola, Bonnie crea Forky, un nuovo giocattolo composto da una forchetta di plastica e da altri pezzi di scarto. Ma nonostante i tentativi di Woody, neanche Forky riesce ad ambientarsi fra gli altri giochi, dato che si sente spazzatura. Durante un viaggio in camper, mentre Buzz e Rex si chiedono quanti sono gli interi positivi minori o uguali a 2022 che possono essere scritti come somma di (uno o più) fattoriali di interi non negativi distinti, Forky si getta fuori dal veicolo e Woody è costretto a seguirlo, non prima di aver urlato la soluzione allo space ranger e al dinosauro. Che numero dice Woody ai due amici? *Nota: 0! e 1! sono da considerarsi distinti.*

Soluzione: la risposta è 0079. Notiamo che $7! > 2022$, ma $0!+...+6! < 2022$, quindi i possibili addendi sono $k!$ con $0 \leq k \leq 6$. Abbiamo 127 modi di prendere sottoinsiemi non vuoti di tali addendi, da cui dobbiamo togliere i sottoinsiemi che hanno stessa somma dovuti al fatto che $0! = 1!$ e $0! + 1! = 2!$. Per simmetria (contando provvisoriamente l'insieme vuoto tra le scelte) abbiamo $\frac{128}{4}$ sottoinsiemi con 0! ma non con 1! e $\frac{128}{4}$ per il viceversa; sempre per simmetria, $\frac{128}{4}$

sottoinsiemi con 0! e 1! di cui la metà non hanno 2!. Concludendo, abbiamo $127 - 32 - 16 = 79$ sottoinsiemi con somma distinta, da cui la risposta.

6. [$\star$] Cosa vuol dire essere un giocattolo

Woody riesce a trovare Forky e, mentre tornano da Bonnie, gli spiega cosa significa essere un giocattolo. "Vedi, Forky", gli dice, "essere un giocattolo significa aiutare un bambino ad essere felice e, a volte, trovare la soluzione di alcuni semplici problemi. Per esempio, detto $f(x) = x^5 + 5x^3 + 3$, quanto vale la somma delle potenze settime delle radici di $f(x)$?". Forky, che finalmente ha capito qual è il suo scopo nel mondo, decide di tornare da Bonnie. Ma qual è la soluzione del problema di Woody?

Soluzione: la risposta è 0105. Il problema chiede $\sum_{f(\lambda)=0} \lambda^7$; osserviamo che se λ è radice di $x^5 + 5x^3 + 3$, allora $\lambda^7 = \lambda^2 \cdot \lambda^5 = \lambda^2 \cdot (-5\lambda^3 - 3) = -5\lambda^5 - 3\lambda^2$. Ripetendo il ragionamento abbiamo che $\sum_{f(\lambda)=0} \lambda^7 = \sum -5(-5\lambda^3 - 3) - 3\lambda^2 = 25 \sum \lambda^3 + 5 \cdot 15 - 3 \sum \lambda^2$, e ci siamo quindi ridotti a trovare la somma dei quadrati e dei cubi.
Iniziamo da $\sum \lambda^2$, che possiamo riscrivere come $\left(\sum \lambda\right)^2 - 2 \sum \lambda \cdot \mu$; per le relazioni radici-coefficienti sappiamo che $\sum \lambda = 0$ e $\sum \lambda \cdot \mu = 5$. Ma allora $\sum \lambda^2 = 0 - 2 \cdot 5 = -10$.
Per ricavare $\sum \lambda^3$ possiamo osservare che $\left(\sum \lambda\right)^3 = \sum \lambda^3 + 3 \left(\sum \lambda\right) \left(\sum \lambda \cdot \mu\right) - 3 \sum \lambda \cdot \mu \cdot \nu$. Sempre grazie alle relazioni radici-coefficienti notiamo che $\sum \lambda \cdot \mu \cdot \nu = 0$, pertanto anche $\sum \lambda^3 = 0$.
In conclusione $\sum \lambda^7 = 25 \cdot 0 + 75 - 3 \cdot (-10) = 105$.

7. Il Luna Park

All'uscita del negozio di antiquariato, Woody incontra nuovamente Bo Peep, che ora vive al Luna Park insieme agli altri giocattoli smarriti. Il Luna Park ha la forma di un triangolo ABC con lati $AB = 700$ e $AC = 900$. Inoltre, detti M il punto medio di AC e D il piede della bisettrice uscente da A, si sa che il quadrilatero $ABDM$ è inscrivibile in una circonferenza. Quanto misura il terzo lato del parco divertimenti?

Soluzione: la risposta è 0848. Se $ABDM$ è ciclico, allora $\angle BDM = 180° - \angle BAC$ e quindi $\angle CDM = \angle BAC$, per cui $\triangle DMC \sim \triangle ABC$. Si ha $BC = \frac{AC \cdot CM}{CD} \overset{*}{=} \frac{16}{9 \cdot BC} \cdot AC \cdot CM$; $BC = \sqrt{\frac{16}{9} \cdot AC \cdot CM} = 600\sqrt{2}$, dove l'uguaglianza con l'asterisco è motivata dal teorema della bisettrice.

8. Quanti premi!

Nel frattempo anche Buzz, alla ricerca di Woody e Forky, arriva al Luna Park, finendo per essere inserito tra i premi di un tiro a segno. Mentre cerca di fuggire, si accorge che il numero di premi è uguale al numero di interi $10 \leq n \leq 2022$ tali che le cifre delle centinaia di $17n$ e $17n + 17$ siano diverse. Quanti sono i premi del tiro a segno?

Soluzione: la risposta è 0342. Sia A_n il valore di $17n$ senza le ultime due cifre (per esempio $17 \cdot 101 = 17017$ e $A_{101} = 170$), allora chiaramente $A_{n+1} - A_n$ è 0 o 1 e il problema chiede per quanti n questa differenza è 1. Notiamo che $A_{10} = 1$ e $A_{2023} = 343$, quindi A_n aumenta di valore esattamente 342 volte, da cui la risposta.

9. Problemi da peluche

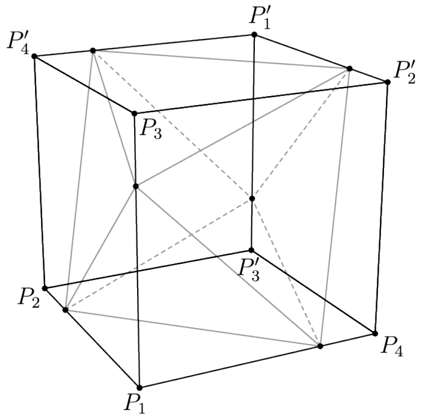
Insieme a Buzz, dal tiro a segno provano a fuggire anche i due peluche Ducky e Bunny. Ducky, il più sveglio dei due, dice all'amico: "Ho capito! Per riuscire a fuggire ci basta trovare tutte le coppie non ordinate di interi non negativi (a, b) tali che $a^2 + b^2 = 2016034$". Bunny, che ovviamente non sa risolvere il problema, va a parlare con Buzz, che esclama "C'è una sola coppia che risolve!". Ma qual è la soluzione del problema di Ducky? *Rispondere con la somma* $a + b$.

Soluzione: la risposta è 2008. Osserviamo che $2016034 = 2 \cdot 1008017$, e che $1008017 = 1 + (1000 + 4)^2$. Dato che $2 \cdot (n^2 + 1) = (n + 1)^2 + (n - 1)^2$, otteniamo che $2016034 = 1003^2 + 1005^2$.

10. [$\star$] Il flipper

Intanto Bo Peep ha accompagnato Woody alla sua nuova casa, costruita all'interno di un flipper in disuso a forma di cubo di lato $1000mm$ e con vertici P_1, P_2, P_3, P_4, P_1', P_2', P_3', P_4'. I vertici P_2, P_3, P_4 sono adiacenti a P_1, e per $1 \leq i \leq 4$, i vertici P_i e P_i' sono vertici opposti. La casa di Bo è un ottaedro regolare che ha un vertice su ognuno dei segmenti P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4, $P_1'P_2'$, $P_1'P_3'$, $P_1'P_4'$. Quanti millimetri misura il lato della casa di Bo?

Soluzione: la risposta è 1060. Le facce dell'ottaedro sono triangoli equilateri, quindi per simmetria ognuno dei 6 spigoli del cubo coinvolti è diviso in due parti con la stessa proporzione. Siano quindi x la più piccola delle due parti e di conseguenza $1000 - x$ la seconda e sia l il lato dell'ottaedro. Per il teorema di Pitagora, guardando una qualsiasi coppia di spigoli del cubo aventi come vertice comune P_1 possiamo scrivere $l^2 = (1000 - x)^2 + (1000 - x)^2$, mentre guardando una qualsiasi coppia di spigoli del cubo appartenenti a rette sghembe possiamo scrivere $l^2 = 1000^2 + x^2 + x^2$. Mettendo a sistema le due equazioni si ottiene $l = \frac{3000}{4} \cdot \sqrt{2} \approx 1060$.



11. Conta le pecore

Bo abita insieme alle sue inseparabili pecorelle, anche loro fatte di porcellana. Una di queste, per addormentarsi, fa un gioco particolare: parte dalla casella numero 1 di una striscia di 11 caselle numerate da 0 a 10. quando si trova sulla casella n salta su quella $n-1$ con probabilità $\frac{n}{10}$ e su quella $n+1$ con probabilità $1 - \frac{n}{10}$. Se raggiunge la casella 0 smette di giocare e va a dormire, mentre se raggiunge la casella 10 sta sveglia l'intera notte. Qual è la probabilità che non si addormenti? *Rispondere con la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

Soluzione: la risposta è 0209. Sia p_i la probabilità che Bo rimanga sveglia partendo dalla casella i, chiaramente la soluzione del problema è p_1. Possiamo scrivere le seguenti relazioni: $p_1 = \frac{9}{10}p_2$, $p_2 = \frac{1}{5}p_1 + \frac{4}{5}p_3$, $p_3 = \frac{3}{10}p_2 + \frac{7}{10}p_4$, $p_4 = \frac{4}{10}p_3 + \frac{6}{10}p_5$. Ora notiamo che partendo dalla casella 5 il gioco è perfettamente simmetrico, quindi abbiamo $p_5 = \frac{1}{2}$. Sostituendo a ritroso si ottiene il risultato.

12. Il piano di Bo

Finalmente anche Buzz arriva al flipper e si ricongiunge con i suoi amici. Insieme escogitano un piano per liberare Forky, prigioniero di Gabby Gabby, e Bo prende subito il comando delle operazioni. "Forky è rinchiuso in un armadio protetto da un lucchetto a combinazione; aspettate il mio segnale e dopo correte al lucchetto. Data una funzione reale f tale che $f\left(\frac{1}{x}\right) = (x+2)\left(f(x) - 4x + \frac{5}{x} + \lambda\right)$ la combinazione vale $f(3)$, per λ uguale a...". Woody però, ansioso di liberare il suo amico, agisce troppo presto e fa fallire il piano, costringendo il gruppo alla fuga. Qual è la somma delle possibili combinazioni al variare di λ tra i numeri reali?

Soluzione: la risposta è 0007.
Sostituendo $x = -1$ otteniamo che $f(-1) = f(-1) + 4 - 5 + \lambda$, da cui $\lambda = 1$.
A questo punto sostituiamo nell'equazione $x = 3$ e $x = 1/3$, ottenendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{3}\right) = 5 \cdot \left(f(3) - 12 + \frac{5}{3} + 1\right) \\ f(3) = \left(\frac{1}{3} + 2\right) \cdot \left(f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{4}{3} + 15 + 1\right) \end{cases}$$

che svolgendo alcuni calcoli diventano

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{3}\right) = 5 \cdot f(3) - 5 \cdot \frac{28}{3} \\ f(3) = \frac{7}{3} \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{7}{3} \cdot \frac{44}{3} \end{cases}$$

Sostituendo la prima nella seconda otteniamo l'equazione

$$f(3) = 5 \cdot \frac{7}{3} \cdot f(3) - 5 \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{28}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{44}{3},$$

ovvero

$$f(3)\left(1 - \frac{35}{3}\right) = \frac{7 \cdot 44 - 35 \cdot 28}{9}.$$

Si ricava quindi $f(3) = 7$; infine si può osservare che la funzione

$$f(x) = \frac{4x^2 - 4x - 3}{x}$$

è una soluzione all'equazione di partenza.

13. La fuga

Durante la fuga, il gruppo è inseguito dai pupazzi da ventriloquo. Per guadagnare un po' di tempo, Buzz chiede ad uno di loro: "sia n un intero positivo con 16 divisori positivi e siano $1 = d_1 < ... < d_{16} = n$ i suoi divisori. Si sa che $d_6 = 18$ e $d_9 - d_8 = 17$, quanto vale la somma dei possibili valori di n?". Distratti dalla domanda, i pupazzi si fermano permettendo ai giocattoli di scappare. Ma quanto vale quella somma?

Soluzione: la risposta è 5832. Notiamo subito che siccome d_8 e d_9 sono i due divisori centrali si ha $d_8 d_9 = n$. Chiaramente se 18 è un divisore di n lo sono anche 1,2,3,6,9, che saranno rispettivamente d_1, d_2, d_3, d_4, d_5. d_7 dev'essere per forza 27 oppure un numero primo maggiore di 18, dividiamoci quindi in questi due casi: se $d_7 = 27$, dato che d_8 e d_9 hanno parità diverse, si ha che le uniche possibilità sono $(d_8, d_9) = (37, 54)$ o $(d_8, d_9) = (54, 71)$. Ricordandoci che $n = d_8 d_9$ troviamo le due soluzioni 1998 e 3834 (che funzionano). Se d_7 invece è primo, mostriamo che n dev'essere comunque divisibile per 27: infatti il numero di divisori di n dev'essere divisibile per ogni esponente che compare nella fattorizzazione di n aumentato di 1, quindi se l'esponente di 3 fosse 2 si avrebbe che 16 è multiplo di 3, che ovviamente è falso. Quindi d_7 è 19 o 23 e $(d_8, d_9) = (27, 38)$ o $(d_8, d_9) = (27, 46)$, che non rispettano le ipotesi.

14. [$\star$] Riflessioni solitarie

Una volta tornati al flipper, Woody prova a convincere il gruppo a ritentare il salvataggio, ma gli altri, memori della sua frettolosità, lo abbandonano: Buzz e i due peluche tornano al camper, mentre Bo e le pecorelle ritornano al loro flipper. Woody, nonostante sia ormai solo, è comunque deciso a salvare il suo amico e quindi si dirige comunque verso il negozio di antiquariato. Per passare il tempo durante il tragitto scrive su un foglio 101 numeri reali $x_1, ..., x_{101}$ con somma 0 e, detta M la loro mediana, si diverte a calcolare il massimo numero reale c tale che $\sum_{i=0}^{101} x_i^2 \geq cM^2$. Quanto vale al massimo c al variare delle possibili sequenze $x_1, ..., x_{101}$? *Rispondere con la parte intera del risultato.*

Soluzione: la risposta è 0103. Possiamo supporre senza perdere generalità $x_1 \leq ... \leq x_{101}$ e $M = x_{51} \geq 0$. Ricordiamo ora che per AM-QM (o Cauchy-Schwarz), per ogni n-upla di numeri reali $(a_1, \ldots, a_n)$ vale

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}\right)^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}$$

Allora, posto $S = \sum_{i=51}^{101} x_i = -\sum_{i=1}^{50} x_i$, valgono

$$\sum_{i=1}^{50} x_i^2 \geq \frac{S^2}{50} \text{ e } \sum_{i=51}^{101} x_i^2 \geq \frac{S^2}{51}$$

Dato che $S \geq 51M$ otteniamo dunque che

$$\sum_{i=0}^{101} x_i^2 \geq \frac{51^2}{50} M^2 + 51M^2 = \frac{5151}{50} M^2$$

D'altra parte con la 101-upla $(-1, -1, \ldots, -1, \frac{50}{51}, \ldots, \frac{50}{51})$, dove $M = x_{51} = \frac{50}{51}$, si ottiene l'uguaglianza, pertanto $\frac{5151}{50}$ è la massima costante possibile.

15. [$\star$] Il patto

Arrivato al negozio, Woody si prepara ad affrontare da solo Gabby Gabby. Tuttavia capisce che la bambola vuole solamente avere una bambina con cui giocare. Lo sceriffo allora decide di cedergli il suo riproduttore vocale a patto che riesca a fare meglio di lui al seguente gioco: entrambi partono con i numeri $1, 2, ..., 2022$ e ad ogni turno scelgono due numeri x e y dalla loro lista li sostituiscono con $2x + 2y$, fino ad ottenere un solo numero N. Gabby Gabby trova subito una strategia per massimizzare il valore di N, e riesce a prendere il riproduttore. Quanto vale il numero che ha trovato? *Rispondere con le ultime 3 cifre di N.*

Soluzione: la risposta è 0426. Quello che cerchiamo è

$$\sum_{i=1}^{2021} 2^i \cdot a_i + 2^{2021} \cdot a_{2022},$$

dove $a_1, ..., a_{2022}$ è una qualche permutazione di 1,...,2022. Per riarrangiamento abbiamo un massimo quando $a_i = i$ per ogni $1 \leq i \leq 2021$, quindi il problema si riduce a calcolare

$$\begin{aligned}
N &= 2022 \cdot 2^{2021} + \sum_{i=1}^{2021} i \cdot 2^i \\
&= 2022 \cdot 2^{2021} + \sum_{i=1}^{2021} \left(\sum_{k=i}^{2021} 2^k \right) \\
&= 2022 \cdot 2^{2021} + \sum_{i=1}^{2021} 2^{2022} - 2^i \\
&= 1011 \cdot 2^{2022} + 2021 \cdot 2^{2022} - 2^{2022} + 2 \\
&= 3031 \cdot 2^{2022} + 2.
\end{aligned}$$

Prendendo il tutto $\pmod{1000}$ abbiamo $N \equiv 31 \cdot 2^{22} + 2 \equiv 426 \pmod{1000}$.

16. [$\star$] La piazzola di sosta

Woody convince Gabby Gabby ad andare insieme a lui a vivere con Bonnie, sicuro che la bambina lo accoglierà bene. Per farlo, però, i due giocattoli (ai quali si è unito anche Forky), devono attraversare la piazzola di sosta per camper. Questa è un pentagono convesso $AXYZB$ inscritto in una semicirconferenza di diametro AB e centro O. Inoltre si sa che $AZ - AX = 6$, $BX - BZ = 9$, $AY = 12$ e $BY = 5$. Mentre i tre studiano il modo migliore per arrivare al camper, Woody si chiede quale sia il perimetro del quadrilatero $OXYZ$. Quanto vale questo perimetro? *Rispondere con la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

Soluzione: la risposta è 0320. Notiamo che i quadrilateri $AXYB$ e $AYZB$ sono inscritti in una circonferenza. Applichiamo quindi il teorema di Tolomeo ad entrambi, ottenendo $XY \cdot AB + AX \cdot BY = AY \cdot BX$; $13 \cdot XY + 5 \cdot AX = 12 \cdot BX$ e analogamente $13 \cdot YZ + 12 \cdot BZ = 5 \cdot AZ$. Sommando le due relazioni otteniamo, dopo semplici passaggi algebrici, $XY + YZ = \frac{138}{13}$. Poichè $\triangle AYB$ è inscritto in una semicirconferenza, è rettangolo e pertanto $AB = 13$, ma $OX = OZ = \frac{AB}{2}$, quindi il perimetro di $OXYZ$ è $OX + OZ + XY + YZ = AB + \frac{138}{13} = \frac{307}{13}$, da cui la risposta.

17. [$\star\star$] Lieto fine

Woody, Gabby Gabby e Forky si incamminano verso il camper, ma nel tragitto incontrano una bambina che ha smarrito i genitori. La bambola decide di abbandonare i suoi nuovi amici per andare a vivere insieme a lei, che non solo l'accetta, ma inizia fin da subito a giocarci insieme. La bambina ha ideato un nuovo gioco: ogni numero intero è inizialmente colorato di rosso. La bambola parte dal numero 0, rivolta verso il numero 1. Quando si trova su un numero, se quel numero è rosso si gira di 180 gradi, lo colora di blu e prosegue di un'unità nella direzione verso cui è rivolta; se è blu, lo colora di bianco e prosegue di un'unità, senza girarsi, e se è bianco lo colora di rosso e prosegue di un'unità, anche in questo caso senza girarsi. Dopo quanti passi ci saranno per la prima volta almeno 20 caselle blu?

Soluzione: la risposta è 6098. Nel seguito denoteremo con $v_2(n)$ il più grande intero k tale che 2^k divide n. Sia N la somma dei 2^k dove k varia tra gli interi non negativi per cui il numero $-1-k$ è blu. Sia M l'analogo facendo variare k sui numeri per cui k è blu. Definiamo inoltre un "evento positivo" il passaggio della bambola dagli interi negativi a quelli non negativi e "evento negativo" il viceversa.

Allora abbiamo che:

- Ogni volta che un evento avviene, che sia positivo o negativo, non ci sono caselle bianche.
- Quando l'n-esimo evento positivo avviene, allora N ha valore n. Analogamente per gli eventi negativi si avrà M con valore n.
- Il numero di passi tra l'$n-1$-esimo evento positivo e l'n-esimo negativo è $2v_2(n) + 1$.
- La bambola si ferma al 1023-esimo evento positivo.

In altre parole, M e N sono la rappresentazione binaria dei due semiassi, considerando "1" le caselle blu e "0" le altre. Ogni evento è un incremento di 1 dell'una o dell'altra.

Per il terzo e il quarto punto abbiamo quindi che la risposta è

$$2 \sum_{i=1}^{1023} (2v_2(i) + 1) = 4v_2(1023!) + 2046.$$

18. Guida spericolata

Nel frattempo i giocattoli nel camper, avvertiti dell'arrivo imminente di Woody e Forky e approfittando di un momento di distrazione della famiglia di Bonnie, prendono il controllo del veicolo per far guadagnare un po' di tempo ai due amici. La loro guida è però spericolata e imprecisa. Il gruppo infatti arriva per sbaglio ad un parco composto da 2022 isole poste ai vertici di un poligono regolare di 2022 lati. Ogni isola è collegata alle due adiacenti da esattamente due ponti l'una (quindi da ogni isola partono 4 ponti in totale). Il camper parte da un'isola e percorre a caso uno dei 4 ponti, distruggendolo a causa del peso eccessivo, e continua così finchè non può più muoversi. Fortunatamente i giocattoli riescono ad uscire dal parco e a raggiungere lo sceriffo e la forchetta, ma Buzz non può fare a meno di chiedersi qual era la probabilità di distruggere tutti i ponti. Sapreste aiutarlo a trovare la soluzione? *Rispondere con le ultime 3 cifre della somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

Soluzione: la risposta è 0451. Abbiamo due possibilità. O il camper compie un giro completo del 2022-agono, avendo poi scelte obbligate per il giro successivo, o cambia direzione esattamente una volta dopo aver attraversato $1 \leq k \leq 2021$ collegamenti. Nel primo caso la probabilità è

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2021}.$$

Nel secondo, fissato k, abbiamo

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{2021-k} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{2020}.$$

Sommando otteniamo

$$\frac{2023}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2021}.$$

Semplificando abbiamo quindi

$$\frac{2023 \cdot 2^{2020}}{3^{2021}}.$$

Il risultato è quindi $2023 \cdot 2^{20} + 3^{21} \equiv 451 \pmod{1000}$.

19. [$\star\star$] L'addio

Woody e Forky salgono sul camper ma lo sceriffo, rendendosi conto che non sarà mai apprezzato da Bonnie com'era apprezzato da Andy, decide di dire addio agli amici e di unirsi al gruppo di Bo Peep. "Ma prima di salutarci per sempre", dice agli altri giocattoli, "c'è ancora tempo per un problema. Siano a, b interi positivi minori o uguali a 2022 tali che $(a+b)(a+b+1)$ sia divisibile per ab. Quanto vale al massimo la somma $a+b$?" Gli amici, per l'ultima volta tutti insieme, risolvono il problema e, dopodichè, Woody si allontana. Ma qual è la soluzione dell'ultimo problema di Woody?

Soluzione: la risposta è 2209. Riscriviamo $\frac{(a+b)(a+b+1)}{ab} = 2 + \frac{a^2+b^2+a+b}{ab} = 2 + c$ con c intero positivo, quindi $(a+b)(a+b+1) = ab(c+2)$. Senza perdere generalità supponiamo $a \geq b$ e che (a, b) sia una soluzione per un qualche c; consideriamo allora l'equazione

$$x^2 - (bc-1)x + b^2 + b = 0.$$

Per definizione a è una soluzione, ma allora per le relazioni radici-coefficienti lo è anche $bc - 1 - a$; nel caso in cui $a > b$, abbiamo che questa nuova radice soddisfa $bc - 1 - a = \frac{b^2+b}{a} \leq \frac{b^2+b}{b+1} = b$, quindi anche $(b, bc-a-1)$ è una soluzione del problema originale "più piccola" di (a, b).
Pertanto ogni coppia (a, b) che soddisfa la divisibilità può essere ridotta a una soluzione con $a = b$, e di conseguenza $c = 2 + \frac{2}{a}$. Siccome a, b, c sono interi positivi si ha che $a = 1$ o $a = 2$.
Ponendo $a = 2$ troviamo $b = 2$, $c = 3$ e possiamo usare il procedimento inverso per costruire una catena di soluzioni

$$(2,2) \to (2,3) \to (3,6) \to (6,14) \to (14,35) \to (35,90) \to (90,234) \to (234,611) \to (611,1598) \to (1598,4182).$$

Il caso con $a = 1$ è analogo, e la catena diventa

$$(1,1) \to (1,2) \to (2,6) \to (6,21) \to (21,77) \to (77,286) \to (286,1066) \to (1066,3977).$$

La risposta al problema è quindi $611 + 1598 = 2209$.

20. [$\star$] *Outro*, Una nuova giostra

Anni più tardi, Woody vive ancora al Luna Park insieme a Bo e ad altri giocattoli smarriti. Insieme, osservano la costruzione di una nuova giostra a forma di triangolo non rettangolo. Questo triangolo T è però particolare, infatti detti T_1 il suo triangolo ortico (il triangolo formato dai piedi delle altezze di T), T_2 il triangolo ortico di T_1, ecc., T è simile ad almeno uno tra $T_1, T_2, T_3, \dots$. Woody non può allora fare a meno di chiedersi quante siano le terne (a, b, c) con $a \leq b \leq c$ interi positivi tali che (a, b, c) siano gli angoli interni di un triangolo avente la stessa proprietà di T. Quante sono le terne?

Soluzione: la risposta è 0169. Dette $a \leq b \leq c$ le misure degli angoli interni di un triangolo T, allora è facile vedere che:

- Se $c < 90°$, il suo triangolo ortico ha angoli $180° - 2a$, $180° - 2b$, $180° - 2c$
- Se $c > 90°$, il suo triangolo ortico ha angoli $2a, 2b, 2c - 180°$.

Notiamo inoltre che se gli angoli di T sono numeri interi allora gli angoli di T_1 sono numeri pari e gli angoli di T_k con $k \geq 2$ sono numeri divisibili per 4, quindi per rispettare le condizioni del problema anche gli angoli di T devono essere multipli di 4, quindi possiamo considerare le terne dell'insieme $A = \{(a, b, c) | a, b, c \in \mathbb{N}, a \leq b \leq c, a + b + c = 45\}$. Ogni elemento di questo insieme corrisponderà al triangolo con angoli $(4a, 4b, 4c)$. Sia ora $F : A \to A$ la funzione che manda una terna di angoli nella terna del suo triangolo ortico, e notiamo che dato un elemento di $(a, b, c) \in A$ possiamo sempre costruire univocamente un triangolo in modo che il suo triangolo ortico abbia angoli $(4a, 4b, 4c)$. Questo significa che la funzione F è biettiva e che il numero di triangoli da noi cercato è semplicemente il numero di elementi di A, ovvero

$$\sum_{i=1}^{15} \left(\left\lfloor \frac{45 - 3i}{2} \right\rfloor + 1 \right) = 169.$$

21. [$\star\star$] *Outro*, Una nuova compagna

Nel frattempo, a casa di Bonnie, la bambina crea una versione femminile di Forky. Quest'ultimo, che se ne innamora fin da subito, decide di trasmettere gli insegnamenti di Woody anche all'altra forchetta. Dopo averle spiegato cosa significhi essere un giocattolo, le propone un problema: "in ogni quadratino dell'espressione seguente (dove ci sono 2022 cinque e 2021 quadratini)", le dice, "è inserito a caso uno dei segni $\{+, -, \times, \div\}$.

$$5 \square 5 \square 5 \square \cdots \square 5 \square 5$$

Qual è il valore medio del risultato?". Il nuovo giocattolo è ancora troppo giovane per rispondere a Forky. Ma qual è la soluzione? *Rispondere con le ultime 3 cifre della somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini. Si ricorda che $\times, \div$ hanno precedenza su $+, -$ e che l'espressione viene valutata da sinistra a destra (ad esempio $5 \div 5 \div 5 = 1/5$).*

Soluzione: la risposta è 0413. L'osservazione chiave è che a noi interessa solo la prima volta in cui compare un segno $+$ o un segno $-$, infatti semplicemente invertendo i segni $+$ e $-$ otteniamo un'espressione che compensa la seconda parte della precedente nel calcolo del valor medio. Ragioniamo quindi per casi sul numero di 5 prima del primo segno $+$ o $-$. Il primo $+$ o $-$ può essere:

- nel primo quadratino con probabilità $\frac{1}{2}$, quindi il contributo al valor medio è $\frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2} \cdot 1$
- nel secondo quadratino con probabilità $\frac{1}{4}$, quindi il contributo al valor medio è $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + 25) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4} \left(5 + \frac{1}{5}\right)$
- ...
- nell'$n-$esimo quadratino con probabilità $\frac{1}{2^n}$, ottenendo $\frac{5}{2} \left(\frac{1}{4^{n-1}}\right) \left(5 + \frac{1}{5}\right)^{n-1}$

Inoltre bisogna contare a parte le espressioni senza segni $+$ o $-$, che contribuiscono per $\frac{5}{4^{2021}} \left(5 + \frac{1}{5}\right)^{2021}$. Sommando tutto otteniamo

$$\frac{5}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \left(5 + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{4^2} \left(5 + \frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{4^{2020}} \left(5 + \frac{1}{5}\right)^{2020} \right) + \frac{5}{4^{2021}} \left(5 + \frac{1}{5}\right)^{2021}.$$

Trattando come progressione geometrica di ragione $\frac{1}{4} \left(5 + \frac{1}{5}\right)$ la parte in parentesi e svolgendo i passaggi algebrici otteniamo

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4^{2021}} \left(5 + \frac{1}{5}\right)^{2021} - 1}{\frac{1}{4}(5 + \frac{1}{5}) - 1} + \frac{5}{4^{2021}} \left(5 + \frac{1}{5}\right)^{2021} = \frac{13^{2021} - 25 \cdot 10^{2018} \cdot 25}{3 \cdot 10^{2018} \cdot 25}.$$

Dato che nella frazione si può semplificare un 3, e che il denominatore ha come ultime cifre tutti zeri, la risposta è $\frac{13^{2021} - 25 \cdot 10^{2018} \cdot 25}{3} \equiv 667 \cdot 13^{2021} \equiv 471 \pmod{1000}$.