OliMaTO 8

Simulazione Gara Nazionale 2022

29 Aprile 2022

Benvenuti all'ottava edizione della simulazione della gara nazionale delle Olimpiadi della Matematica sotto l'egida di OliMaTO, la dodicesima complessiva.
Compilare la prima parte di questo modulo prima della gara e la seconda parte prima di consegnare.

NOME:

COGNOME:

Anno di corso:

Istituto frequentato:

Provincia di appartenenza:

Indirizzo e-mail:

Punteggio alle provinciali (indicare se si parteciperà alla gara nazionale individuale):

Indica qui di seguito i punteggi che PENSI di aver ottenuto nei seguenti esercizi:

Esercizio 1:

Esercizio 2:

Esercizio 3:

Esercizio 4:

Esercizio 5:

Esercizio 6:

Punteggi ottenuti (spazi riservati ai correttori):

1. 2. 3. 4. 5. 6. TOT.

REGOLAMENTO

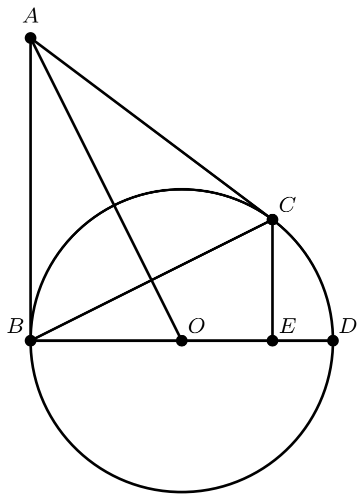
- Si raccomanda di scrivere le soluzioni esclusivamente nel fascicoletto che avete ricevuto, utilizzando un foglio diverso per ogni esercizio risolto. Per poter partecipare alla gara è necessario essere muniti di un documento d'identità. Lasciatelo in evidenza sul vostro banco.
- Gli unici strumenti consentiti sono quelli per scrivere e per disegnare. In particolare, **non è consentito** l'utilizzo di appunti, tavole, macchine calcolatrici, strumenti elettronici di qualsiasi genere e telefoni cellulari o qualsivoglia mezzo di comunicazione con l'esterno.
- Per ragioni organizzative non è consentito lasciare il proprio posto senza l'autorizzazione del personale di sorveglianza. Per qualsiasi necessità dovete alzare la mano e attendere. In particolare, questa procedura deve essere seguita per:
  - porre dei quesiti relativi al testo della prova;
  - chiedere di andare in bagno (prima di recarvi in bagno raccogliete tutto ciò che avete scritto e consegnatelo al sorvegliante. Non è consentito andare in bagno durante i primi 30 minuti e durante gli ultimi 45 minuti di gara);
  - consegnare il compito.
- La durata della prova è di 4 ore e 30 minuti. Ogni esercizio vale 7 punti.
- Solo durante i primi 30 minuti di gara è consentito porre delle domande per chiarimenti sul testo.
- Negli ultimi 10 minuti di gara non è consentito consegnare il compito. Tutti quelli che saranno rimasti in aula fino a quel momento dovranno lasciare il fascicoletto chiuso sul proprio tavolo, senza altri fogli o brutte copie, ed attendere il termine ufficiale della gara. Al termine esatto i sorveglianti provvederanno a raccogliere tutti i fascicoletti e solo alla fine sarete autorizzati a lasciare l'aula.

Buon lavoro!!!

Esercizio 1

Sia Γ una circonferenza di centro O e A un punto esterno ad essa; siano poi AB e AC due segmenti tangenti a Γ in B e C rispettivamente. Sia D il secondo estremo del diametro passante per B, e sia E la proiezione di C sul diametro BD. Dimostrare che $BE \cdot BO = AB \cdot CE$.

Soluzione proposta



Essendo AB e AC tangenti alla circonferenza, $AB = AC$; inoltre $BO = CO$ in quanto raggi, quindi AO è asse di BC e pertanto sono perpendicolari. $\angle OBC$ è complementare a $\angle AOB$ per la perpendicolarità appena dimostrata, ma anche $\angle BAO$ è complementare allo stesso angolo, quindi $\angle OBC = \angle BAO$.
Dato che $\triangle ABO$ e $\triangle BEC$ sono triangoli rettangoli, dall'uguaglianza appena dimostrata $\angle BAO = \angle OBC = \angle EBC$ otteniamo che i due triangoli sono simili. Per la similitudine, vale $\dfrac{AB}{BO} = \dfrac{BE}{CE}$, da cui la tesi.

Esercizio 2

Un gruppo di n persone sta giocando ad un gioco da tavola che ha le seguenti regole:

1. Il gioco è suddiviso in round
2. In ogni round partecipano esattamente 3 persone
3. Il gioco finisce dopo n round

Sapendo che alla fine del gioco ogni coppia di persone ha condiviso almeno un round di gioco, determinare il massimo valore possibile per n.

Soluzione proposta

Dimostriamo che il massimo valore per n è 7.
Sia C il numero di coppie distinte che ha giocato insieme almeno un round. Per l'ipotesi sappiamo che *tutte* le coppie hanno giocato, quindi $C = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
D'altra parte, in ogni round giocano insieme esattamente 3 coppie, perciò sommando per gli n round di gioco deve valere $C \leq 3 \cdot n$ (una coppia può giocare anche più di un round).
Pertanto per gli n che soddisfano deve valere la disuguaglianza

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq 3n,$$

da cui si ricava che necessariamente $n \leq 7$.
Infine, mostriamo che per $n = 7$ si può effettivamente creare un gioco del genere. Numerando le persone da 1 a 7, le suddividiamo nel seguente modo tra i round:

$$123 \quad 145 \quad 167 \quad 246 \quad 257 \quad 347 \quad 356$$

Si può facilmente verificare che ogni coppia compare in esattamente un round.

Esercizio 3

a) Trovare tutte le coppie (m, n) di interi positivi tali che $n^4 = m^2 + n^2 + 3$.

b) Dimostrare che per ogni intero $k > 2$ l'equazione $n^{2k} = m^2 + n^2 + k + 1$ non ha soluzioni per (m, n) interi positivi.

Soluzione proposta

a) Notiamo innanzitutto che $n^4 = m^2 + n^2 + 3 > m^2$, ovvero $m < n^2$ o equivalentemente $m \leq n^2 - 1$. Ma allora $n^4 \leq (n^2 - 1)^2 + n^2 + 3$, da cui $n^2 \leq 4$. Perciò n può valere solo 1 o 2, e sostituendo questi due valori si trova che solo la coppia $(3, 2)$ soddisfa.

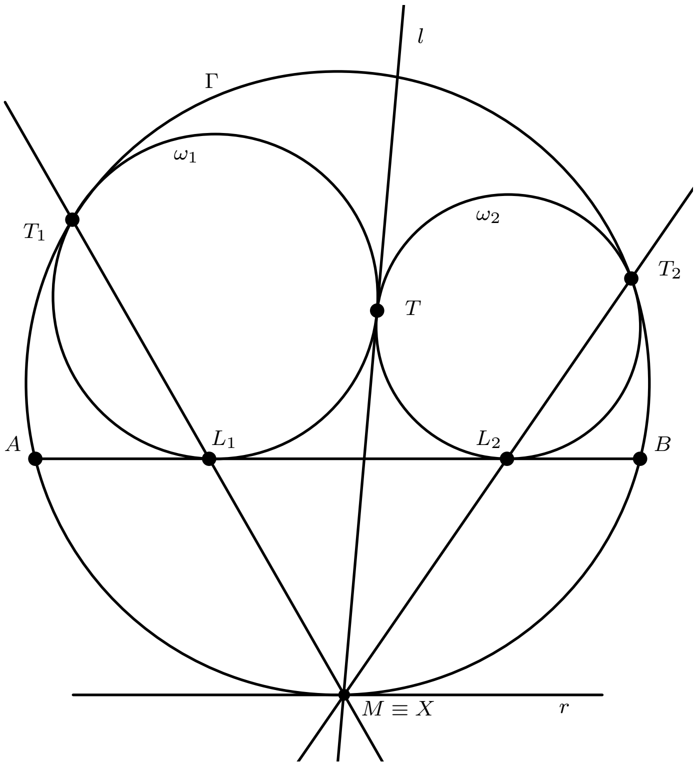
b) Come prima cosa osserviamo che $n = 1$ non porta a soluzioni; possiamo dunque suporre $n \geq 2$. Fattorizziamo ora l'equazione come $(n^k - m)(n^k + m) = n^2 + k + 1$. Dato che $k > 2$ abbiamo che $n^k + m \geq n^2$; inoltre dato $n \geq 2$ vale che $n^k + m \geq (1 + 1)^k \geq 1 + k$ per l'espansione del binomio di Newton. Pertanto vale $2(n^k + m) \geq n^2 + k + 1$, da cui si ottiene che $n^k - m \leq 2$; inoltre questo fattore deve essere strettamente positivo, perciò può valere solo 1 o 2.

   - Caso $n^k - m = 1$. Sostituendo si ottiene l'equazione $2n^k - 1 = n^2 + k + 1$. Dato che $k \geq 3$ e $n \geq 2$ possiamo scrivere $n^k \geq n \cdot n^2 \geq 2 \cdot n^2 \geq n^2 + 2$. Unendo questo al fatto che $n^k \geq 1 + k$ otteniamo $2n^k > n^2 + k + 1$, ovvero questo caso non ammette soluzioni.
   - Caso $n^k - m = 2$. Sostituendo si ottiene l'equazione $2(2n^k - 2) = n^2 + k + 1$, overo $4n^k = n^2 + k + 5$. Sappiamo che $n^k \geq 1 + k$ e $n^k \geq n^2 + 2$ dal caso prima, perciò $4n^k \geq (1 + k) + 3(n^2 + 2) > n^2 + k + 5$ e dunque neanche questo caso ammette soluzioni.

Esercizio 4

Sia Γ una circonferenza e $\overline{AB}$ una sua corda; le circonferenze ω_1 e ω_2 sono tangenti internamente a Γ, ad $\overline{AB}$ e tra loro in T; sia l la tangente comune passante per T. Dimostrare che l passa per un punto X indipendente dalle posizioni di ω_1 e ω_2.

Soluzione proposta



Dimostriamo che il punto cercato è il punto medio M dell'arco AB che giace dalla parte opposta di T rispetto alla corda $\overline{AB}$.
Notiamo che l è l'asse radicale di ω_1 e ω_2. Basterà quindi dimostrare che le potenze di M rispetto alle due circonferenze sono uguali.
Siano T_1, L_1 i punti di tangenza di ω_1 con Γ e $\overline{AB}$ rispettivamente, e siano similmente definiti T_2, L_2.
Sia $\mathcal{H}$ l'omotetia di centro T_1 che manda ω_1 in Γ; allora $\mathcal{H}$ manda L_1 in M. Infatti, dato che sia $\overline{AB}$ che la tangente a Γ in M, che chiamiamo r, sono perpendicolari al raggio OM (con O il centro di Γ), le due rette risultano parallele e quindi $\mathcal{H}$ manda $\overline{AB}$ in r. Quindi, l'intersezione tra $\overline{AB}$ e ω_1 (ossia il punto L_1) viene mandata nell'intersezione tra r e Γ (ossia il punto M). Ne deduciamo che T_1, L_1, M sono allineati. Analogamente saranno allineati anche T_2, L_2, M.
Considerando i triangoli $\triangle AT_1M$ e $\triangle L_1AM$, possiamo quindi scrivere che $\angle AT_1M \cong \angle MAL_1$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti, l'angolo $\angle AML_1 = \angle AMT_1$ è in comune e pertanto i due triangoli considerati sono simili. Se ne deduce che $MT_1 \cdot ML_1 = MA^2$. Analogamente, $MT_2 \cdot ML_2 = MB^2$.
Poichè M è punto medio dell'arco AB, si ha che $MA \cong MB$, ottenendo $MT_1 \cdot ML_1 = MT_2 \cdot ML_2$; possiamo perciò concludere che M appartiene all'asse radicale di ω_1 e ω_2 come desiderato, quindi il punto X cercato coincide con M.

Esercizio 5

Marco fa un gioco con un mazzo di kn carte, con n, k interi positivi, dove ogni carta è numerata da 1 a n e ogni numero è presente esattamente k volte. Marco divide inizialmente le carte in maniera casuale in n pile numerate da 1 a n e formate da k carte l'una poste a faccia in giù; fatto ciò, gira la prima carta dalla pila numero 1, la guarda, la toglie dal gioco e continua facendo lo stesso sulla pila il cui numero era scritto sulla carta appena scartata. Il gioco termina quando Marco raggiunge una pila senza nessuna carta, e vince se e solo se a quel punto nessuna pila ha ancora delle carte. Marco, stufo di perdere, decide di barare: dopo aver mescolato il mazzo e formato le n pile casuali, decide di riordinare a suo piacimento ciascuna pila, senza però cambiare la pila di appartenenza di ogni carta. Per quali configurazioni iniziali può riuscire a vincere dopo questo procedimento?

Soluzione proposta

Dimostriamo che Marco può vincere se e solo se non esiste un sottoinsieme proprio $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ tale che ogni carta di S (ovvero ogni carta in una pila il cui indice sta in S) contenga un numero appartenente ad S.

Rappresentiamo il gioco come un multigrafo orientato $G = (V, E)$ con $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ insieme dei vertici (ovvero delle pile) ed E insieme degli archi; il numero di archi $\overrightarrow{v_i v_j}$ dal vertice v_i al vertice v_j è pari al numero di carte nella pila i che hanno scritto il numero j.
Denotiamo con $\operatorname{indeg}(v)$ il numero di archi che entrano nel vertice v e con $\operatorname{outdeg}(v)$ il numero di archi che escono da v.
Per come è costruito il gioco, osserviamo che $\operatorname{outdeg}(v_i) = k$, poiché ogni pila contiene esattamente k carte; d'altra parte $\operatorname{indeg}(v_i) = k$ perché ci sono esattamente k carte nel mazzo con su scritto il numero i.
Dimostriamo ora un lemma di teoria dei grafi che ci permetterà di concludere facilmente.

Lemma. *Sia $G = (V, E)$ un multigrafo orientato con $\operatorname{indeg}(v) = \operatorname{outdeg}(v)$ per ogni vertice $v \in V$. Sia G^+ il sottografo completo formato dai vertici con grado positivo. Allora G contiene un circuito euleriano (ovvero un ciclo che tocca una e una sola volta ogni arco) se e solo se G^+ è debolmente connesso (ovvero è connesso se considerato come grafo non orientato).*

Dimostrazione. La prima implicazione è semplice: se G^+ non è connesso, allora esistono almeno due componenti connesse, ed entrambe contengono almeno un arco perché i vertici di G^+ hanno grado positivo; pertanto è impossibile avere un circuito euleriano.
Dimostriamo per induzione sul numero di archi che se G^+ è debolmente connesso, allora c'è un ciclo euleriano in G.
Se $|E| = 2$, l'ipotesi sui gradi implica che questi due archi devono essere $\overrightarrow{vw}$ e $\overrightarrow{wv}$ per una qualche coppia di vertici, pertanto la tesi segue ovviamente.
Prendiamo ora un qualsiasi vertice u di G^+; sappiamo che ha almeno un arco entrante e almeno un arco uscente, diciamo $\overrightarrow{vu}$ e $\overrightarrow{uw}$, con $v \neq u$ e $w \neq u$. Sia G' il grafo ottenuto da G cancellando questi due archi e aggiungendo l'arco $\overrightarrow{vw}$; osserviamo che la condizione sui gradi vale ancora su G', e inoltre $(G')^+$ è ancora debolmente connesso: se infatti togliendo i due archi il grado di u è diventato 0, questo non appartiene più a $(G')^+$; se gli unici archi rimasti su u sono archi di tipo $\overrightarrow{uu}$, rimuoviamo anche quelli.
Ma allora per ipotesi induttiva il grafo G' ha un circuito euleriano, che dovendo toccare l'arco $\overrightarrow{vw}$ sarà della forma $\cdots \to \overrightarrow{vw} \to \cdots$; possiamo allora riportare questo ciclo sul grafo G, semplicemente cambiando il cammino in $\cdots \to \overrightarrow{vu} \to \overrightarrow{uw} \to \cdots$; nel caso in cui fossero stati rimossi anche archi del tipo $\overrightarrow{uu}$, li aggiungiamo tutti tra $\overrightarrow{vu}$ e $\overrightarrow{uw}$. Pertanto abbiamo ottenuto un circuito euleriano su G. $\square$

Osserviamo ora che il grafo G che abbiamo costruito contiene un circuito euleriano se e solo se Marco riesce a vincere riordinando le pile: se c'è un riordinamento che funziona, basta tradurre l'ordine di gioco in un circuito euleriano; d'altra parte, dato un circuito euleriano, è sufficiente farlo partire dal vertice 1 e ordinare le carte come descritto dal ciclo.
Poiché G soddisfa anche la proprietà dei gradi, otteniamo che Marco riesce a vincere se e solo se G^+ è debolmente connesso. Dato che tutti i vertici di G hanno grado k, Marco vince se e solo se G è connesso, quando considerato come grafo non diretto.
Concludiamo osservando che la proprietà detta all'inizio è equivalente al fatto che G sia connesso: se G è connesso, allora per ogni $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ esiste un cammino tra v_i (con $i \in S$) e v_j (con $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus S$), perciò esiste una carta di S che esce al di fuori di S; d'altra parte se un tale S esiste, è impossibile connettere vertici dentro S con vertici fuori da S.

Esercizio 6

Dato un intero positivo n indichiamo con $d(n)$ il numero di divisori positivi di n.

a) Dimostrare che esistono infiniti interi positivi non scrivibili come $a^{d(a)}+b^{d(b)}$ con a, b interi positivi.

b) Esistono infiniti interi positivi non scrivibili come $a^{d(b)}+b^{d(a)}$ con a, b interi positivi e strettamente maggiori di 1?

Soluzione proposta

Per il punto **a)** ci basta considerare i numeri della forma $4k+3$. Infatti $a^{d(a)}$ è sempre un quadrato perfetto: se a è un quadrato perfetto anche $a^{d(a)}$ lo è, se a non è un quadrato perfetto allora ha almeno un fattore con esponente dispari, quindi $d(a)$ è pari e $a^{d(a)}$ è un quadrato perfetto. Allo stesso modo $b^{d(b)}$ è un quadrato perfetto. Ricordando che i residui quadratici modulo 4 sono solo 0 e 1 abbiamo che una somma di quadrati può essere solo 0, 1 o 2, pertanto non si può ottenere un numero della forma $4k+3$.
Per il punto **b)** la risposta è sì. Fissato un N naturale, consideriamo l'insieme

$$S(N) := \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a^{d(b)} + b^{d(a)} \leq N \text{ e } a, b > 1\}.$$

Dato che $a, b > 1$ allora anche $d(a), d(b) > 1$; inoltre, a meno che n sia primo, vale anche $d(n) \geq 3$. Consideriamo allora i due seguenti insiemi

$$P(N) := \{(a, b) \in S(N) \mid a \text{ primo oppure } b \text{ primo } \}$$

$$C(N) := \{(a, b) \in S(N) \mid a, b \text{ composti } \}$$

e osserviamo che $S(N) = P(N) \cup C(N)$, da cui $|S(N)| \leq |P(N)| + |C(N)|$.
Stimiamo ora quanti elementi ci sono in $P(N)$; per simmetria, studiamo le coppie in cui $a = p$ è primo, perciò vale $p^{d(b)} + b^2 \leq N$, e in particolare $p, b \leq \sqrt{N}$. Pertanto

$$|P(N)| \leq 2 \cdot \pi(\sqrt{N}) \cdot \sqrt{N},$$

dove $\pi(x)$ è la funzione che conta quanti numeri primi minori di x ci sono. Poiché tutti i primi (tranne 2 e 3) sono congrui a $\pm 1 \pmod 6$, vale che $\pi(x) \leq \frac{x}{3} + 2$; da questo possiamo ricavare

$$|P(N)| \leq \frac{2}{3}N + 4\sqrt{N}.$$

Per stimare $C(N)$ notiamo che $d(a), d(b) \geq 3$, pertanto se $(a, b) \in C(N)$ allora $a^3 \leq a^{d(b)} \leq a^{d(b)} + b^{d(a)} \leq N$; perciò per tutti gli elementi di $C(N)$ vale $a, b \leq \sqrt[3]{N}$. Si ha dunque

$$|C(N)| \leq \left(\sqrt[3]{N}\right)^2 = N^{\frac{2}{3}}.$$

In conclusione abbiamo ottenuto che

$$|S(N)| \leq \frac{2}{3}N + 4\sqrt{N} + N^{\frac{2}{3}},$$

che per N sufficientemente grande implica $|S(N)| \leq \frac{5}{6}N$, da cui

$$N - |S(N)| \geq \frac{N}{6}.$$

Questo implica la tesi, in quanto le coppie di $S(N)$ non generano abbastanza numeri della forma $a^{d(b)} + b^{d(a)}$ per coprire tutto l'intervallo di naturali $[1, N]$, lasciandone scoperto sempre almeno un sesto; facendo crescere N si vede quindi che otteniamo infiniti interi non esprimibili nella forma $a^{d(b)} + b^{d(a)}$.