Allenamenti EGMO 2022

A. Dimostra che per ogni numero reale $r > 2$ esistono esattamente 2 o 3 numeri reali positivi x tali che:

$$x^2 = r \cdot \lfloor x \rfloor \tag{1}$$

C. Sabrina ha $2 \cdot n$ numeri interi positivi. Vuole dividerli in n coppie disgiunte. Una suddivisione così fatta si dice *bella* se per ogni coppia il prodotto dei due numeri non è mai un quadrato perfetto. Mostrare che se esiste una suddivisione bella, allora ne esistono almeno $n!$.

G. Sia ABC un triangolo. H è il suo ortocentro e D, E ed F sono i piedi delle altezze rispettivamente dei vertici A, B e C. Chiamiamo F' il simmetrico di F rispetto a B, ed E' il simmetrico di E rispetto a C. Sia X il secondo punto di intersezione della circonferenza circoscritta al triangolo $AF'E'$ con la retta AD. Mostrare che $HX = 4 \cdot HD$.

N. Sia $n \geq 3$ intero e siano $a_1, a_2, \dots a_n$, n numeri naturali primi tra loro (ovvero si ha $\text{MCD}(a_1, a_2, \dots a_n) = 1$, e non necessariamente coprimi a due a due) tali che $\text{mcm}(a_1, a_2, \dots a_n)$ divide $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Mostrare che $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ divide $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{n-2}$.