IPOTESI DI RIEMANN - NUMERI PRIMI

Vale l'uguaglianza:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_i^{-s}} \qquad \underline{s = a + ib} \quad (1)$$

essendo $n^s = e^{\ln n^s} = e^{\ln(n^a n^{ib})} = e^{(a \ln n + ib \ln n)}$ si ha:

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a \left(\cos(b \ln n) + i \operatorname{sen}(b \ln n)\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(b \ln n)}{n^a} - i \frac{\operatorname{sen}(b \ln n)}{n^a} \right) \quad (2)$$

Dopo aver trasformato il secondo membro della (1) con lo stesso tipo di calcolo fatto per ottenere la (2) posso scrivere l'uguaglianza: (2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(b\ln n)}{n^{a}} - i\,\frac{\operatorname{sen}(b\ln n)}{n^{a}}\right) = \prod_{i=1}^{\infty}\left(\frac{P^{2a}\cos^{2}(b\ln n) - P^{a}\cos(b\ln n) + i\left(P^{2a}\operatorname{sen}^{2}(b\ln P) - P^{a}\operatorname{sen}(b\ln P)\right)}{\left(\left(P^{a}\cos(b\ln n) - 1\right)^{2} + P^{2a}\operatorname{sen}^{2}(b\ln n)\right)\left(\left(P^{a}\cos(b\ln P) - 1\right)^{2} + P^{2a}\operatorname{sen}^{2}(b\ln P)\right)}\right) \qquad (3)$$

PER TROVARE UNA RELAZIONE TRA I (P_i, a, b) UGUAGLIO I 2 MEMBRI DELLA (3) A ZERO

Si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(b \ln n)}{n^a} = 0 \quad \text{I} \qquad p^a \cos(b \ln p) = 1 \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(b \ln n)}{n^a} = 0 \quad \text{II} \qquad p^a \operatorname{sen}(b \ln p) = 1 \end{cases} \qquad (4)$$

RISOLVERE IL SISTEMA (4) CORRISPONDE A DIMOSTRARE INTANTO L'IPOTESI DI RIEMANN E POI A TROVARE UN COLLEGAMENTO CON I p_i TRAMITE a e b

Per studiare la convergenza delle serie I e II in funzione dei parametri a e b si può sostituire la serie con il corrispondente integrale e trovare i valori dei parametri a e b per i quali questo converge

4

$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(b \ln x)}{x^a}\, dx = 0 \quad F} \qquad \text{II}'$$

$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{\cos(b \ln x)}{x^a}\, dx = 0 \quad H} \qquad \text{I}'$$

STUDIO SOLO IL CASO $a > 0, b > 0$

~~GRAFICO QUALITATIVO DI H~~

$\boxed{F \gtrless 0} \iff \sin(b\ln x) \gtrless 0 \Rightarrow \cancel{\boxed{F=0} \longrightarrow b\ln x = k\pi \Rightarrow \boxed{x = e^{\frac{k\pi}{b}}}}$

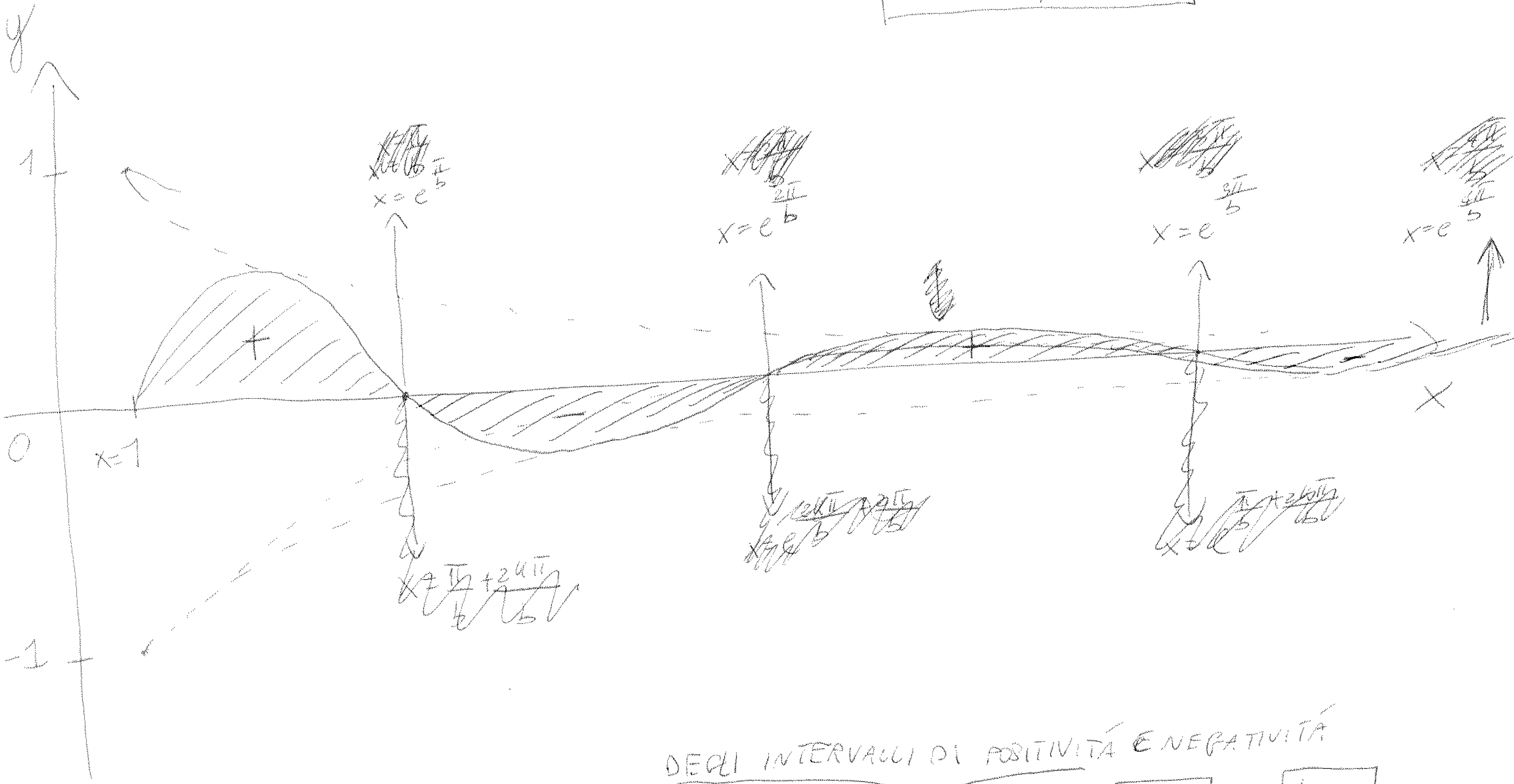
funzione integranda

$\boxed{F>0} \Rightarrow 2k\pi < b\ln x < \pi + 2k\pi \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x > e^{\frac{2k\pi}{b}} \\ x < e^{\frac{\pi}{b} + \frac{2k\pi}{b}} \end{array}}$

$\boxed{F<0} \longrightarrow \pi + 2k\pi < b\ln x < 2\pi + 2k\pi \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x < e^{\frac{2k\pi}{b} + \frac{2\pi}{b}} \\ x > e^{\frac{\pi}{b} + \frac{2k\pi}{b}} \end{array}}$

GRAFICO QUALITATIVO DI F

$$F = \frac{\text{sen}(5 \ln x)}{x^a}$$



⊛ SONO RAPPRESENTATI I VALORI DEGLI INTERVALLI DI POSITIVITÀ E NEGATIVITÀ PER $\boxed{k=0}$ e $\boxed{k=1}$

Le primitive di F si fan per parti e si ottiene :

$$\boxed{\int \frac{\operatorname{sen}(b \ln x)}{x^{a}}\, dx = G = \frac{x^{1-a} \operatorname{sen}(b \ln x)(1-a)}{(1-a)^2 + b^2} - \frac{b\, x^{1-a} \cos(b \ln x)}{(1-a)^2 + b^2}}$$

$$\boxed{H \gtrless 0} \Leftrightarrow \cos(b \ln x) \gtrless 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{H > 0} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x > 1 \\ x < e^{\frac{\pi}{2b}} \end{array}}$$

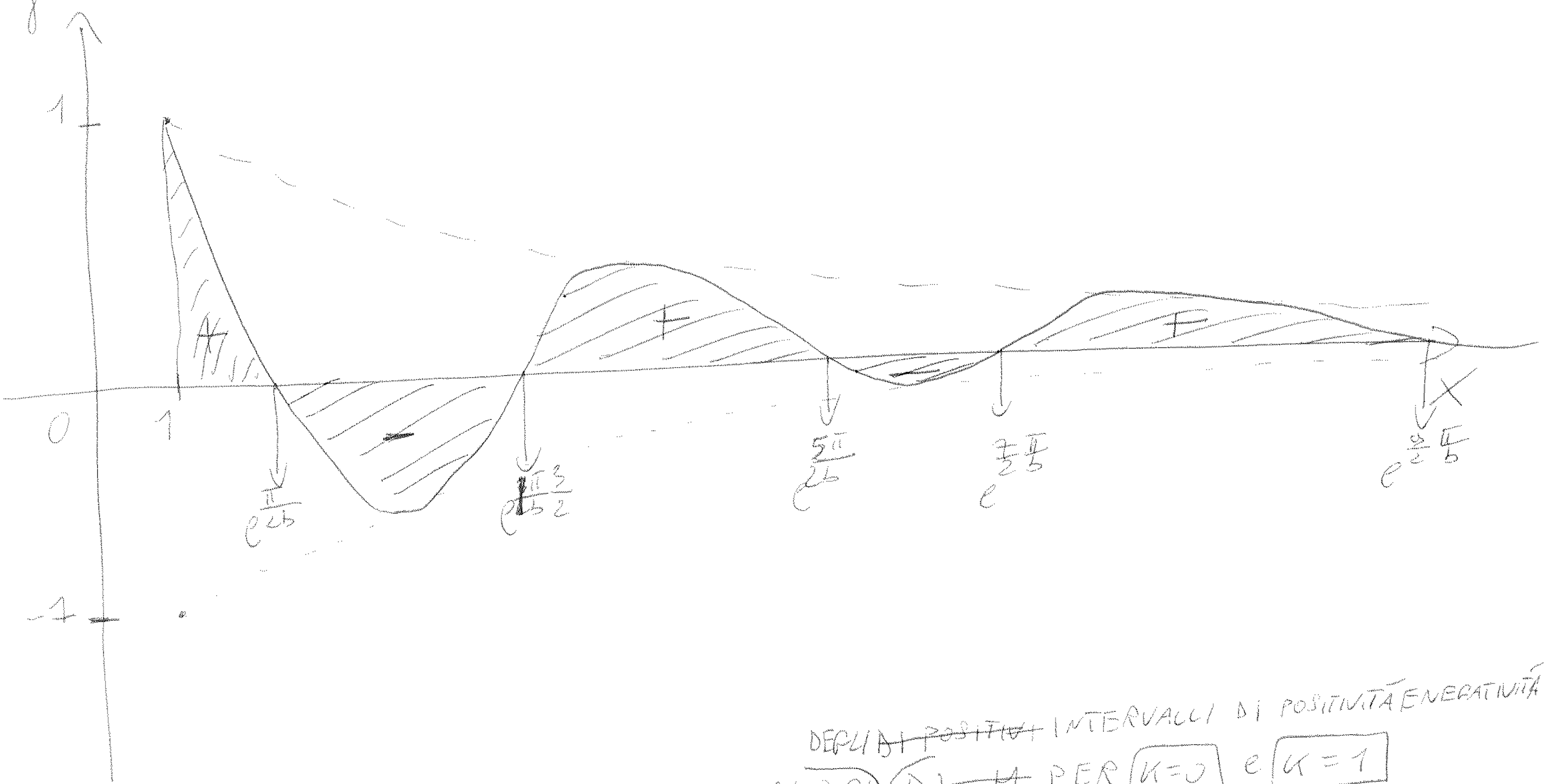
$$\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < b \ln x < \frac{5}{2}\pi + 2k\pi \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x < e^{\frac{5\pi}{2b} + \frac{2k\pi}{b}} \\ x > e^{\frac{3}{2}\frac{\pi}{b} + \frac{2k\pi}{b}} \end{array}}$$

$$\boxed{H < 0}$$

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < b \ln x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x < e^{\frac{3}{2}\frac{\pi}{b} + \frac{2k\pi}{b}} \\ x > e^{\frac{\pi}{2b} + \frac{2k\pi}{b}} \end{array}}$$

GRAFICO QUALITATIVO DI H

$$H = \frac{\cos(b \ln x)}{x^a}$$



⊛ SONO RAPPRESENTATI I VALORI ~~DI H~~ DEGLI ~~DI POSITIVI~~ INTERVALLI DI POSITIVITÀ E NEGATIVITÀ ~~H~~ PER $\boxed{k=0}$ e $\boxed{k=1}$

La primitiva di H si fa per parti e si ottiene:

$$\int \frac{\cos(b \ln x)}{x^{a}}\, dx = I = \frac{x^{1-a} \cos(b \ln x)(1-a)}{(1-a)^2 + b^2} + \frac{b\, x^{1-a} \sin(b \ln x)}{(1-a)^2 + b^2}$$

Per imporre le condizioni II' e I' si deve imporre che la somma delle aree positive e negative sia uguale a zero in I' e II' : (11)

$x = e^{\frac{2k\pi}{b} + \frac{2\pi}{b}}$ $\Big\uparrow$ AREA NEGATIVA GENERICA $x = e^{\frac{\pi}{b} + \frac{2k\pi}{b}}$

$$\ell \to \left[\frac{x^{1-a}\,\mathrm{sen}(b \ln x)(1-a)}{(1-a)^2 + b^2} - \frac{b\,x^{1-a}\cos(b \ln x)}{(1-a)^2 + b^2} \right]_{x = e^{\frac{2k\pi}{b}}}^{x = e^{\frac{\pi}{b} + \frac{2k\pi}{b}}}$$

$\Big\uparrow$ AREA POSITIVA GENERICA

$$\to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b\,e^{\frac{(1-a)2k\pi}{b}}\left(e^{\frac{(1-a)\pi}{b}} + 1\right)}{(1-a)^2 + b^2} \to \text{SOMMA AREE POSITIVE}$$

$$\to -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b\,e^{\frac{(1-a)2k\pi}{b}}\left(e^{(1-a)\frac{2\pi}{b}} + e^{(1-a)\frac{\pi}{b}}\right)}{(1-a)^2 + b^2} \to \text{SOMMA AREE NEGATIVE}$$

(12)

$$I \to \left[\frac{x^{1-u}\cos(b\ln x)(1-u)}{(1-u)^2+b^2} + \frac{b\,x^{1-u}\,\mathrm{sen}(b\ln x)}{(1-u)^2+b^2} \right]_{x=1}^{x=e^{\pi/2b}}$$

$x=e^{\pi/2b}$ ↑ AREA POSITIVA OTTENUTA PER k=0 ↓ $x=1$

$x=e^{\frac{5\pi}{2b}+\frac{2k\pi}{b}}$ ↑ AREA POSITIVA GENERICA ↓ $x=e^{\frac{3\pi}{2b}+\frac{2k\pi}{b}}$

$x=e^{\frac{3\pi}{2b}+\frac{2k\pi}{b}}$ ↑ AREA NEGATIVA GENERICA ↓ $x=e^{\frac{\pi}{2b}+\frac{2k\pi}{b}}$

$$\to \frac{b\,e^{(1-u)\frac{\pi}{2b}}}{(1-u)^2+b^2} - \frac{(1-u)}{(1-u)^2+b^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b\,e^{(1-u)\frac{2k\pi}{b}}\left(e^{(1-u)\frac{5\pi}{2b}} + e^{(1-u)\frac{3\pi}{2b}}\right)}{(1-u)^2+b^2}$$

⇒ SOMMA AREE POSITIVE

$$\to -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b\,e^{(1-u)\frac{2k\pi}{b}}\left(e^{(1-u)\frac{3}{2}\frac{\pi}{b}} + e^{(1-u)\frac{\pi}{2b}}\right)}{(1-u)^2+b^2} = -\frac{b\left(e^{(1-u)\frac{3}{2}\frac{\pi}{b}} + e^{(1-u)\frac{\pi}{2b}}\right)}{(1-u)^2+b^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b\,e^{(1-u)\frac{2k\pi}{b}}\left(e^{(1-u)\frac{3\pi}{2b}} + e^{(1-u)\frac{\pi}{2b}}\right)}{(1-u)^2+b^2}$$

↳ SOMMA AREE NEGATIVE

PER G SI HA:

SOMMA AREE POSITIVE + SOMMA AREE NEGATIVE = 0

$\boxed{0 < a < 1}$ → soddisfacendo Riemann

$$\cancel{be^{(1-a)\frac{\pi}{b}}} + b - b^{(1-a)\frac{2\pi}{b}} - \cancel{be^{(1-a)\frac{\pi}{b}}} = 0 \Rightarrow \boxed{b - b^{(1-a)\frac{2\pi}{b}} = 0}$$

PER I SI HA:

SOMMA AREE POSITIVE + SOMMA AREE NEGATIVE = 0

$\boxed{0 < a < 1}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{(1-a)\frac{2k\pi}{b}} = \frac{a-1-be^{(1-a)\frac{5\pi}{2b}}}{be^{(1-a)\frac{\pi}{2b}} - be^{(1-a)\frac{5\pi}{2b}}}$$

SICCOME LA SERIE VA AD INFINITO IL DENOMINATORE DEL SECONDO MEMBRO DEVE ANDARE A ZERO E SI OTTIENE COSÌ UN'ALTRA RELAZIONE TRA a e b:

$$\boxed{e^{(1-a)\frac{\pi}{2b}} - e^{(1-a)\frac{5\pi}{2b}} = 0}$$

→ $\boxed{\text{MAI}}$

SI AZZERA SOLTANTO LA PARTE CON IL SENO, LA PARTE REALE DI Z NON SI AZZERA MAI QUINDI:

EQUAZIONI RISOLVENTI

$$\boxed{\begin{aligned} &b - b^{(1-a)\frac{2\pi}{b}} = 0 \\ &p^{a}\,\mathrm{sen}(b \ln p) = 1 \end{aligned}}$$

???

Ora applicando i logaritmi ad ambo i membri ~~si ha~~ e scegliendo $a = \frac{1}{2}$ (retta critica) si dovrebbe ottenere un'identità per ogni p_i:

$\cancel{\ln b} = \frac{\pi}{b}\cancel{\ln b}$ $\boxed{b = \pi}$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}\ln p_i + \ln(\mathrm{sen}(\pi \ln p_i)) = 0 \Rightarrow \ln(\mathrm{sen}(\pi \ln p_i)) = \ln \tfrac{1}{\sqrt{p_i}}}$$

$$\boxed{\mathrm{sen}(\pi \ln p_i) = \frac{1}{\sqrt{p_i}}}$$

EX.

3 → 0,06 ≠ 0,60

5 → 0,08 ≠ 0,44

7 → 0,10 ≠ 0,40

MA I CONTI NON TORNANO???

ASPETTO COMMENTI E SPIEGAZIONI!!!!