Soluzioni del giornalino n. 18

Gruppo Tutor

Soluzione del problema 1 Soluzioni corrette ci sono pervenute da Claudio Filippo Bianchi, Alessandra Caraceni, Simone Costa, Angelo De Marco, Salvatore Ingala, Antonio La Manna, Arsen Palestini, Giuseppe Porcelluzzi, `thematrix86@....`

Osservando che $12^2 + 35^2 = 37^2$ si vede che T è rettangolo. Perciò i cateti sono anche altezze, e sicuramente sono maggiori dell'altezza relativa all'ipotenusa (come si vede con un semplice calcolo). Quindi l'altezza più lunga misura 35.

Soluzione del problema 2 Soluzioni corrette ci sono pervenute da Simone Costa e Salvatore Ingala.

È immediato verificare che la prima cifra non nulla (contando dal fondo) del prodotto ab è — in qualsiasi base — il prodotto delle prime cifre non nulle di a e b, modulo la base. Vediamo come si comporta l'operazione $\widetilde{\ }$ sulle cifre 1 e 2: $\widetilde{1} \cdot \widetilde{1} = 2 \cdot 2 \equiv 1$, $\widetilde{2} \cdot \widetilde{2} = 1$, $\widetilde{1} \cdot \widetilde{2} = 2$ mentre $\widetilde{1 \cdot 1} = 2$, $\widetilde{2 \cdot 2} \equiv 2$ e $\widetilde{1 \cdot 2} = 1$ (le moltiplicazioni sono tutte modulo 3). Quindi $\widetilde{\ }$ non rispetta i prodotti delle prime cifre non nulle di a e b. Ne segue che l'uguaglianza $\widetilde{a}\widetilde{b} = \widetilde{ab}$ vale se e solo se $a = 0$ o $b = 0$.

Soluzione del problema 3 Soluzioni corrette ci sono pervenute da Claudio Filippo Bianchi, Alessandra Caraceni, Simone Costa, Antonio La Manna, Giuseppe Porcelluzzi.
Una soluzione parzialmente corretta ci è pervenuta da Fabio Lilliu.

Il triangolo PBQ è isoscele su base PQ, quindi la bisettrice di B è anche asse, dunque $PI = IQ$, dove I è l'incentro di ABC; similmente, il triangolo CQR è isoscele su base QR, quindi $QI = RI$. Proseguendo a questo modo si dimostra la catena di uguaglianze $PI = QI = RI = P'I = Q'I = R'I$ che mostra che i 6 dati punti stanno su una circonferenza di centro I.

Soluzione del problema 4 Una soluzione corretta ci è pervenuta da Simone Costa. Una soluzione parzialmente corretta ci è pervenuta da Alessandra Caraceni.

Sia n il numero di vertici del grafo e sia m il numero di archi del grafo. Dal momento che ogni arco è comune a due vertici, questo viene contato due volte quando metto le etichette, e quindi quando poi sommo ottengo $2m$. Sia k il massimo numero che appare sulle etichette e sia v un vertice sulla cui etichetta ci sia scritto k. Da v escono quindi k archi distinti, che termineranno in k foglie distinte, se le foglie non fossero distinte avrei un ciclo, contrariamente all'ipotesi che il grafo sia un albero. Quindi il grafo ha almeno k foglie distinte.

Soluzione del problema 5 Soluzioni corrette ci sono pervenute da Alessandra Caraceni, Angelo de Marco, Claudio Filippo Bianchi, Fabio Lilliu, Guido Costa e Salvatore Ingala.

La soluzione che proponiamo è quella di Salvatore Ingala.

Possiamo scrivere

$$n^2 + 3n + 5 = (n-4)(n+7) + 33.$$

Inoltre, poiché $n+7 = (n-4)+11$, $n-4$ ed $n-7$ sono entrambi divisibili per 11 oppure non lo è nessuno. Nel primo caso, $(n-4)(n-7)$ è divisibile per 121 e quindi $(n-4)(n-7)+33$ è divisibile per 11 ma non per 121, dal momento che non lo è 33. Nel secondo caso, $(n-4)(n-7)+33$ non è divisibile per 11 né, a maggior ragione, per 121.

Soluzione del problema 6 Soluzioni corrette ci sono state inviate da Alessandra Caraceni, Simone Costa e Fabio Lilliu.

Dividiamo i numeri tra 1 e 100 nelle dieci classi di resto modulo 10. Poiché $53 > 50$ ci sarà una classe di resto cui apparterranno almeno 6 dei 53 numeri scelti. Poiché ogni classe è composta da 10 elementi, nella classe con almeno 6 numeri devono necessariamente trovarsene due le cui cifre delle decine differiscono di uno, questi due numeri differiscono di 10.
Dividiamo ora i numeri nelle classi di resto modulo 12. Poiché $53 > 48$ esisterà una classe di resto cui apparterranno almeno 5 dei 53 numeri scelti. Poiché ogni classe è composta da al più 9 elementi, nella classe con almeno 5 numeri devono trovarsene due che differiscono esattamente di 12.
Non è invece possibile trovare una coppia la cui differenza sia 11, come si può vedere prendendo i numeri interi negli intervalli

$$[1, 11], [23, 33], [45, 55], [67, 77], [89, 97]$$

Soluzione del problema 7 Soluzioni parzialmente corrette ci sono pervenute da Simone Costa e Angelo De Marco.

Dall'ipotesi fornita è possibile dedurre che $a_{ij} = \frac{c_i}{c_j}$ solo per $i \neq j$, come notato dal solutore Simone Costa: difatti, non vengono fornite alcune condizioni sui termini sulla diagonale a_{ii}, quindi può essere assegnato loro un valore arbitrario senza che si violi la condizione data. (Si può poi notare che ponendo $a_{ii} = 1$ sia l'ipotesi che la tesi sono valide anche quando alcuni degli indici coincidono.)

Fissiamo nella formula dell'ipotesi $k = 1$: abbiamo allora per ogni i, j

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{j1}a_{1i}}.$$

Se riuscissimo a provare che $a_{1i} = \frac{1}{a_{i1}}$, allora si avrebbe

$$a_{ij} = \frac{a_{i1}}{a_{j1}}$$

e quindi definendo $c_n := a_{n1}$ (per $n \neq 1$) avremmo la tesi per tutti gli $i, j \neq 1$. Si verifica facilmente che definendo $c_1 := 1$ riusciamo a sistemare anche i casi con $i = 1$ oppure $j = 1$.
Quindi ci siamo ricondotti a dover dimostrare che $a_{1i} = \frac{1}{a_{i1}}$, o anche più in generale che $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$.
Usiamo l'ipotesi una volta chiamando gli indici i, j, k e una volta chiamandoli i, j, t e otteniamo

$$a_{ij}a_{jk}a_{ki} = 1,$$
$$a_{ij}a_{jt}a_{ti} = 1,$$

da cui, semplificando a_{ij},

$$a_{jk}a_{ki} = a_{jt}a_{ti}. \tag{1}$$

Ora scegliamo un numero s diverso da i, j, k e t e scriviamo a_{jk} come

$$a_{jk} = \frac{1}{a_{ks}a_{sj}}$$

(conseguenza della formula data come ipotesi), e analogamente con gli altri termini che compaiono nella (1). Quindi la (1) diventa

$$\frac{1}{a_{ks}a_{sj}}\frac{1}{a_{is}a_{sk}} = \frac{1}{a_{ts}a_{sj}}\frac{1}{a_{is}a_{st}},$$

da cui semplificando i termini uguali rimane

$$a_{ks}a_{sk} = a_{ts}a_{st}. \tag{2}$$

Possiamo interpretare questa formula come "se cambiamo uno dei due indici, il prodotto $a_{xy}a_{yx}$ resta invariato". Da questa otteniamo subito che se cambiamo *entrambi* gli indici il prodotto resta invariato: infatti per ogni m, n, p, q indici possibili abbiamo

$$a_{mn}a_{nm} = a_{pn}a_{np} = a_{np}a_{pn} = a_{qp}a_{pq},$$

dove nella prima e terza uguaglianza abbiamo usato la (2).
Quindi il prodotto $a_{mn}a_{nm}$ è costante indipendentemente da m e n, e possiamo chiamarlo P. Ora, dall'ipotesi applicata prima agli indici i, j, k e poi a i, k, j abbiamo

$$1 = 1 \cdot 1 = (a_{ij}a_{jk}a_{ki})(a_{ik}a_{kj}a_{ji}) = (a_{ij}a_{ji})(a_{ik}a_{ki})(a_{jk}a_{kj}) = P^3.$$

Quindi $P^3 = 1$, cioè $P = 1$. Abbiamo quindi provato che per ogni m, n si ha $a_{mn}a_{nm} = 1$, cioè $a_{nm} = \frac{1}{a_{mn}}$, come ci eravamo proposti di dimostrare.

Soluzione del problema 8 Soluzioni corrette ci sono pervenute da Alessandra Caraceni e Simone Costa.
Una soluzione parzialmente corretta ci è pervenuta da Fabio Lilliu.

Osserviamo innanzitutto che, data una corda CD per A, il punto P in cui si incontrano le tangenti in C e D alla circonferenza è l'inverso circolare del punto medio di CD (rispetto, ovviamente alla circonferenza data); infatti, detto M tale punto medio, PM, CD e OC,PC sono perpendicolari, quindi, applicando il primo teorema di Euclide, otteniamo $PO^2 = OM \cdot OP$. Questa relazione, insieme all'evidente fatto che P, O, M sono allineati, dimostra l'affermazione precedente.
Dunque, possiamo ridurci a studiare il luogo dei punti medi delle corde per A. Sicuramente, questo è contenuto nella circonferenza di diametro AO, poiché data CD generica corda per A, con punto medio M, abbiamo che AOM è rettangolo in M e dunque la mediana da M su AO ha lunghezza $AO/2$, indipendente dalla corda CD scelta; del resto, dato un qualunque punto sulla circonferenza di diametro AO, è facile verificare che la corda per lui e per A ha lui come punto medio.
Concludendo, il luogo cercato è l'inverso circolare della circonferenza di diametro AO, escluso il punto O (corrispondente al diametro per A); tale inverso è una retta perpendicolare ad OA che dista dal centro r^2/OA (dove r è il raggio della circonferenza data), ovvero passa per l'inverso circolare di A.

Nota: La retta così trovata si dice *polare* del punto A rispetto alla circonferenza data; allo stesso modo si può definire il *polo* di una retta, applicando la costruzione inversa a quella fornita dal testo. L'applicazione che ad ogni punto fa corrispondere la sua polare e ad ogni retta il suo polo si chiama *polarità* associata alla circonferenza data ed è una particolare trasformazione geometrica che mantiene le proprietà di intersezione tra gli oggetti.

Soluzione del problema 9 Soluzioni corrette ci sono pervenute da Maria Colombo e Simone Costa.

L'idea chiave dello Step 1 è tratta dalla soluzione di Maria Colombo, mentre l'idea chiave dello Step 3 è tratta dalla soluzione di Simone Costa.

Sia S l'insieme delle 2^n stringhe formate da n cifre 0 e 1. Stabiliamo un po' di terminologia: data $s \in S$, diciamo che la *figlia maggiore* di s è la stringa ottenuta cancellando la prima cifra di s e scrivendo 1 in coda. Analogamente, diciamo che la *figlia minore* di s è la stringa ottenuta scrivendo 0 in coda. È facile vedere che ogni stringa ha esattamente due genitori e due figli.
Le regole della successione $\{s_k\}$ ci dicono che:

- ogni termine è figlio del precedente;
- le figlie maggiori non si possono ripetere;
- le figlie minori compaiono solo dopo le corrispondenti sorelle maggiori.

Step 1. *La prima stringa che si ripete nella successione è quella composta da soli zeri. Da quel punto in poi, tutte le stringhe sono composte da soli zeri.*

Dimostrazione. Innanzi tutto le regole della successione vietano alle maggiori di comparire più di una volta. La prima stringa a comparire due volte deve essere minore. Ognuna di queste due occorrenze è preceduta da uno dei genitori e, dato che si tratta della prima ripetizione, i due genitori sono distinti.
La sorella maggiore deve essere comparsa prima della prima occorrenza della minore. Se la maggiore avesse un predecessore, sarebbe uno dei genitori; ciò però non può essere, perché si avrebbe la sua ripetizione. Quindi la maggiore è il primo termine della successione (vale a dire $0\dots01$) e la sorella minore corrispondente è la stringa di soli zeri, che perciò è la prima stringa ripetuta.
Per finire, i figli di una stringa di soli zeri sono le stringhe $0\dots01$ e $0\dots00$. La prima è il primo termine della successione ed è perciò già comparsa, quindi dopo la prima ripetizione segue un'altra stringa di soli zeri. □

Definiamo ora A come il sottoinsieme di S delle stringhe che compaiono almeno una volta nella successione degli s_k.

Step 2. *Se $s \in S$ non appartiene ad A, la figlia minore di s non appartiene ad A.*

Dimostrazione. Supponiamo il contrario e che, cioè, la figlia minore appartenga ad A. Le regole ci dicono che anche la sorella maggiore deve appartenere ad A.
Se la sorella maggiore è il termine iniziale della successione, allora entrambi i suoi genitori appartengono ad A, dato che si tratta della stringa composta da soli zeri e del suo primo predecessore.
Se non è il termine iniziale, entrambe le sorelle hanno un predecessore che è un loro genitore. Per il Lemma 1, sappiamo che i predecessori devono essere distinti e quindi entrambi i genitori sono in A. Ma allora, in entrambi i casi, $s \in A$, contrariamente alle ipotesi. □

Step 3. *$A = S$. Ossia, la successione contiene tutte le possibili stringhe.*

Dimostrazione. Supponiamo di no, cioè che esista una stringa s che non sia in A. Per il Lemma 2, la figlia minore di s non appartiene ad A e, a sua volta, anche la figlia minore di essa e così via. Le stringhe così costruite sono ottenute dalle precedenti scrivendo uno zero in coda. Quindi, ripetendo n volte questo ragionamento, arriveremo alla stringa composta da soli zeri, che quindi non può stare in A. Ma ciò contraddice il Lemma 1. □

Step 4. *I primi 2^n termini della successione $\{s_k\}_{k=1,2,\dots}$ sono distinti.*

Dimostrazione. Per il Lemma 3, la successione deve contenere tutte le stringhe di S, che sono 2^n. Del resto, per il Lemma 1, dopo la prima ripetizione, tutti i termini della successione sono formati da soli zeri. Quindi la prima ripetizione deve avvenire dopo il 2^n-esimo termine. □

Soluzione del problema 10 Soluzioni corrette ci sono pervenute da : Claudio Filippo Bianchi, Alessandra Caraceni, Maria Colombo, Simone Costa, Salvatore Ingala, Fabio Lilliu, Elia Santi.

Ricordiamo che con $\sum_{sym} f(a,b,c)$ si intende la somma dell'espressione $f(a,b,c)$ su tutte le permutazioni della terna (a,b,c), cioè $f(a,b,c)+f(a,c,b)+f(b,c,a)+f(b,a,c)+f(c,a,b)+f(c,b,a)$.

Proponiamo due soluzioni:

Soluzione 1:

Sviluppando l'espressione a primo membro e riscrivendo la disuguaglianza in notazione simmetrica, ci riconduciamo a dimostrare

$$\sum_{sym} a^2b - \frac{\sum_{sym} a^3}{2} \le \frac{\sum_{sym} abc}{2}$$

cioè

$$\sum_{sym} (a^3 - 2a^2b + abc) \ge 0$$

che è vera per la disuguaglianza di Schur.

(Notare che non è stato usato il fatto che a,b,c sono le lunghezze dei lati di un triangolo, e che quindi la disuguaglianza è vera anche senza questa ipotesi)

Soluzione 2:

Essendo a,b,c le lunghezze dei lati di un triangolo, possiamo sostituire $a = x+y$, $b = x+z$, $c = y+z$. Con queste sostituzioni, la disuguaglianza, in notazione simmetrica, diventa (dopo un po' di conti)

$$\sum_{sym} x^2y \geq \sum_{sym} xyz$$

che segue direttamente dalla disuguaglianza di raggruppamento (o "bunching"), ma si può anche dimostrare utilizzando la disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica:

dividendo per xyz ci riconduciamo infatti a provare

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 6.$$

Ma $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{yx}} = 2$ per AM-GM, e scrivendo le analoghe per x, z e y, z e sommando membro a membro si ottiene proprio la disuguaglianza voluta.

Soluzione del problema 11 Soluzioni corrette ci sono pervenute da Maria Colombo, Simone Costa, Salvatore Ingala e Fabio Lilliu; una soluzione parzialmente corretta ci è stata inviata da Alessandra Caraceni.

$$f(x + f(y)) = y + f(x)\ \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

Ponendo $x = 0$ si ottiene:

$$f(f(y)) = y + f(0)\ \forall y \in \mathbb{Q}$$

In generale vale che, se $g \circ h$ è iniettiva allora h è iniettiva, se è surgettiva allora g è surgettiva; nel nostro caso deduciamo che $f(y)$ è bigettiva perché $y + f(0)$ lo è. Poiché f è bigettiva, esiste un unico razionale a tale che $f(a) = 0$. Ponendo $y = a$ nella relazione iniziale si ottiene

$$f(x) = f(x) + a$$

e quindi $a = 0$, quindi $f(0) = 0$, quindi

$$f(f(x)) = x\ \forall x \in \mathbb{Q}$$

Chiamando $z = f(x)$ la relazione iniziale diventa

$$f(z + y) = f(z) + f(y)\ \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

dal momento che f è bigettiva e quindi al variare di $x \in \mathbb{Q}$ $f(x)$ descrive tutti i razionali. È noto che le uniche funzioni da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$ con questa proprietà sono quelle lineari della forma $f(x) = kx$ con k un numero razionale. Sostituendo nell'equazione di partenza si ottiene: $kx + k^2y = y + kx$, cioé $k^2y = y$ per ogni y e, quindi, $k = 1$ o $k = -1$. Si verifica facilmente che $f(x) = x$ ed $f(x) = -x$ sono entrambe soluzioni valide, e sono dunque le uniche.

Soluzione del problema 12 Soluzioni corrette ci sono pervenute da Alessandra Caraceni e Simone Di Marino.
Una soluzione parzialmente corretta ci è pervenuta da Simone Costa.

Suddividiamo la soluzione in questo modo: dimostriamo prima alcune condizioni che necessariamente S deve rispettare e verifichiamo poi che esse sono pure sufficienti.

Step 1. *Non vi sono 3 punti allineati*

Dimostrazione. È evidente che, se i punti sono più di 2, non ve ne possono essere 3 su una stessa retta, altrimenti dovrebbero essere in numero infinito: siano infatti A, B, C allineati in quest'ordine in S, allora vi è anche A_1 simmetrico di A rispetto all'asse di BC, A_2 simmetrico di A_1 rispetto all'asse di AB e così via, scegliendo sempre l'asse più lontano dal punto A_i; questi punti sono sempre distinti e sono infiniti. □

Step 2. *I punti stanno su circonferenze concentriche*

Dimostrazione. Ora, siano A, B, C tre punti non allineati. Allora gli assi di AB e BC concorrono in O, circocentro di ABC; componendo le simmetrie rispetto a quei due assi si ottiene una rotazione attorno ad O, quindi S è invariante per rotazioni attorno ad O. Da ciò segue che i punti di S si trovano su circonferenze concentriche in O, chiamiamole $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ (supponiamole ordinate in modo che Γ_1 sia la più piccola e Γ_r la più grande); ora, su ogni Γ_i ci devono essere almeno due punti, in quanto la rotazione ottenuta in precedenza non può essere l'identità (porta A in C). □

Step 3. *I punti su una circonferenza sono vertici di un poligono regolare*

Dimostrazione. È evidente che i punti sulla stessa circonferenza devono essere disposti a poligono regolare: siano infatti A, B, C e D, E, F due terne ordinate (ad esempio in senso antiorario) di punti sulla stessa circonferenza, di modo che tra A e C vi sia solo B e tra D e F vi sia solo E; sappiamo che l'insieme non cambia se gli applichiamo la rotazione di centro O che manda A in B, o quella che manda D in F, quindi se $\angle DOF < \angle AOC$, l'immagine di A sotto la rotazione che manda D in F dovrebbe trovarsi tra B e C e questo è assurdo, quindi gli angoli sono uguali (basta ripetere il ragionamento con l'altra disuguaglianza). Dunque i punti sono i vertici di un poligono regolare (da questo ragionamento rimarrebbero esclusi i casi con 2 o 3 punti sulla circonferenza, ma questi si verificano singolarmente). □

Step 4. *I poligoni sulle circonferenze hanno tutti lo stesso numero di lati*

Dimostrazione. Ora, si considerino la circonferenza Γ_1 e una qualunque altra circonferenza Γ_i; supponiamo che i punti di S su Γ_1 formino un k-agono regolare, mentre quelli su Γ_i formino un $m-$agono regolare. Questo significa che S è invariante per rotazioni di centro O e angolo $2\pi/k$ e $2\pi/m$, quindi l'n-agono su Γ_1 deve essere mandato in se stesso da rotazioni di angolo $2\pi/m$ e dunque $m|k$, similmente si ragiona per l'm-agono regolare su Γ_i e si ricava che $k|m$. Quindi $m = k$. $\square$

Step 5. *I poligoni sono tra loro omotetici rispetto ad O (a meno di rotazioni di $2\pi/2k$)*

Dimostrazione. Consideriamo un'omotetia h di centro O che manda Γ_1 su Γ_i; sia P un punto di S in Γ_1. Se esiste Q punto di S su Γ_i tale che $\angle QOP < 2\pi/2k$ (dove k è il numero di punti di S su ogni circonferenza), chiamato R un vertice adiacente a Q, la simmetria rispetto all'asse di RQ manda P in un punto P' tale che $\angle POP' < 2\pi/k$, ma questo è assurdo. Quindi, a meno di ruotare attorno ad O di $2\pi/2k$, i poligoni sono tra loro omotetici. $\square$

Step 6. *Vi è una sola circonferenza*

Dimostrazione. Supponiamo che esista Γ_i omotetica a Γ_r (quest'ultima è la circonferenza più esterna) e siano P e Q due punti di S, uno sull'una e uno sull'altra, corrispondentisi per omotetia; allora la simmetria rispetto all'asse di PQ manda Γ_i all'esterno di Γ_r e questo è assurdo.
Quindi tutte le altre circonferenze interne devono essere ruotate di $2\pi/2k$ rispetto a Γ_r.
Sia dunque P su Γ_{r-2} e Q il suo corrispondente per omotetia su Γ_{r-1}; la simmetria rispetto all'asse PQ manderà tutte le circonferenze Γ_i con $i < r-1$ all'esterno di Γ_{r-1} e dunque manderà i punti di S che stanno su queste nei punti di S che stanno su Γ_r, ma questo è impossibile. Dunque non ci possono essere circonferenze con poligoni omotetici a quello su Γ_{r-1} nè a quello su Γ_r e dunque $r \leq 2$.
Supponiamo $r = 2$. Siano infine P su Γ_1 e Q su Γ_2; sia s la simmetria rispetto all'asse di PQ. I punti di S sono dati dalle intersezioni $\Gamma_i \cap s(\Gamma_j)$ con $i, j = 1, 2$ e dunque sono al più 8.
Studiando i casi $n = 4, 6, 8$ si vede che la configurazione con due circonferenze non è possibile e dunque i punti stanno su una sola circonferenza. $\square$

Step 7. *I vertici dei poligoni regolari vanno bene*

Dimostrazione. Si verifica facilmente che l'insieme dei vertici di un poligono regolare di n lati ha la proprietà richiesta.
Questo basta per concludere che l'insieme S è l'insieme dei vertici di un poligono regolare. $\square$