Giornalino del gruppo Tutor
Numero 17

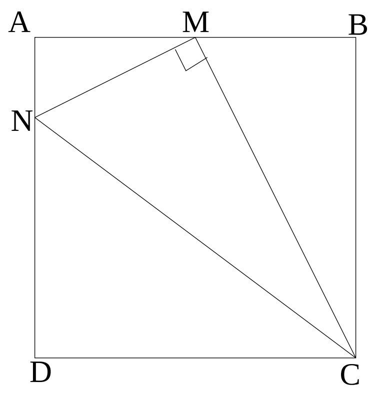
Potete inviarci le vostre soluzioni entro il **20 aprile** all'indirizzo di posta elettronica `soluzioni@olimpiadi.ing.unipi.it`. I nomi dei solutori compariranno insieme alle soluzioni con il prossimo numero del giornalino. *Le soluzioni devono essere motivate da un'accurata dimostrazione, anche quando la domanda chiede solo una risposta numerica.*
Per favore spedite un messaggio diverso per ogni soluzione, indicando chiaramente nel soggetto il numero del problema e quello del giornalino corrente (17 in questo caso). Se ne avete bisogno per meglio scrivere le formule, potete inviare allegati in qualunque formato umanamente leggibile (I migliori sono `.ps`, `.pdf`, `.tex`. Il `.doc` va bene ma potrebbe dare qualche problema con i simboli matematici, se riusciste a convertirlo in uno dei precedenti ve ne saremmo grati).

Problema 1

Prendiamo 9 punti nello spazio, a tre a tre non allineati, e tracciamo tutti i segmenti che uniscono due di essi. Consideriamo un piano che non passi per nessuno dei 9 punti: qual è, al massimo, il numero di segmenti che attraversano il piano?

Problema 2

Sia $ABCD$ un quadrato, chiamiamo M il punto medio di AB e N un punto sul lato AD in modo che $\widehat{NMC}$ sia retto (come in figura). Dimostrare che $\widehat{BCM} = \widehat{MCN}$.



Problema 3

Sia n un intero positivo. Sia A l'insieme degli interi k tali che $0 \leq k \leq n$ e il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ sia un numero dispari. Dimostrare che il numero di elementi di A è una potenza intera di 2.

Problema 4

Sia ABC un triangolo. Chiamiamo *taglio* un segmento i cui estremi giacciono sui lati di ABC (vertici inclusi). Dato un triangolo rettangolo isoscele, trovare il taglio o i tagli di lunghezza minima che lo dividono in due figure di area uguale.

Problema 5

Sia P un polinomio a coefficienti interi per cui esitono interi distinti a, b tali che $P(a) = b$ e $P(b) = a$. Dimostrare che esiste al più un intero n tale che $P(n) = n$.

Problema 6

Determinare tutti gli interi positivi n tali che $61 \mid (5^n - 4^n)$.

Problema 7

Sia $a_1, ..., a_k$ una sequenza finita di interi. Diciamo che essa è *alternante* se è crescente e se numeri consecutivi hanno parità opposta (cioè si alternano numeri pari e dispari). Dato $n \in \mathbb{N}$, trovare il numero $A(n)$ delle sequenze alternanti tali che $a_1 = 1$ e $a_i \leq n$ per ogni i.

Problema 8

Sia ABC un triangolo e sia Γ la sua circonferenza circoscritta; chiamiamo M il punto medio dell'arco di Γ di estremi B, C che non contiene il punto A.
Indichiamo con I l'incentro di ABC e con I_a l'excentro opposto al vertice A (ovvero l'incontro della bisettrice dell'angolo interno in A e degli angoli tra BC e i prolungamenti di AB e AC dalla parte di B e C rispettivamente).
Dimostrare che M è il punto medio di II_a.

Problema 9

Sia data una scacchiera $4 \times n$ con n intero positivo. Dimostrare che non è possibile passare per ogni casella della scacchiera una sola volta e tornare sulla casella iniziale muovendosi come il cavallo nel gioco degli scacchi.
Bonus question: la tesi resta vera se eliminiamo il vincolo di dover tornare sulla casella iniziale?

Problema 10

Dimostrare che la media dei punti fissi di una permutazione è 1. Ovvero:
Sia σ una permutazione dei numeri da 1 a n (cioè una funzione bigettiva dall'insieme $\{1, \ldots, n\}$ in sé stesso); indichiamo con $\text{fix}(\sigma)$ il numero dei punti fissi di σ (cioè il numero degli interi $i \in \{1, \ldots, n\}$ tali che $\sigma(i) = i$). Dimostrare che

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \text{fix}(\sigma) = 1,$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le $n!$ permutazioni dei numeri da 1 a n.

Problema 11

Dimostrare che per ogni x, y, z reali positivi,

$$(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2) \geq 9(xy+xz+yz)$$

Problema 12

Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che per tutti gli $x, y \in \mathbb{R}$ si abbia

$$f(x-f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$