Soluzioni del giornalino n. 17

Gruppo Tutor

Soluzione del problema 1 Soluzioni corrette ci sono pervenute da : Angelo De Marco, Valerio Dose, Salvatore Ingala, Carlo Metta, Raffaele Scandone.

NOTA: Nessuno dei solutori ha pensato di includere nella propria soluzione la dimostrazione che esista un piano che divide i punti nel modo voluto; abbiamo deciso di segnalare comunque tali soluzioni come corrette, nonostante una simile mancanza costerebbe certamente un punto o due in una gara ufficiale.

Un piano intercetta un segmento se e solo se i suoi estremi stanno in semispazi opposti. Diciamo perciò che il piano cercato individua due semispazi, che spartiscono i punti dati in due sottoinsiemi, che chiamamo A e B, uno dei quali contiene a punti e l'altro b. Ovviamente $a + b = 9$.
Il numero di segmenti con estremi in semispazi opposti è dato dalle coppie di elementi di $A \times B$ (il prodotto cartesiano), che ha ab elementi. Il massimo valore di ab, tra le scelte possibili di a e b interi positivi e a somma 9 è quando uno vale 4 e l'altro 5, quindi il massimo numero possibile di segmenti è 20.
A questo punto occorre provare che esiste almeno un piano che divide lo spazio in modo tale che lasci 4 punti da una parte e 5 dall'altra, per mostrare che tale massimo è effettivamente raggiunto. Per far ciò, scegliamo un piano che non sia parallelo a nessuno dei segmenti che congiungono i punti dati. A meno di ruotare gli assi cartesiani, possiamo supporre che tale piano sia ortogonale all'asse dele ascisse.
Osserviamo che i 9 punti hanno ascisse a due a due distinte (se così non fosse, esisterebbe un piano ortogonale all'asse x che contiene un segmento congiungente due dei punti dati). Possiamo perciò ordinare i 9 punti per ascisse crescenti. Chiamiamo tali ascisse $x1, x2, \ldots, x_9$. Scegliamo $\bar{x}$ un qualunque numero reale compreso tra x_4 e x_5. Il piano formato dai punti con ascissa $\bar{x}$ lascia i primi quattro punti da una parte, e gli altri dall'altra.

Soluzione del problema 2 Soluzioni corrette ci sono pervenute da: Angelo De Marco, Valerio Dose, Simone Ferraro, Leonardo Ferro, Salvatore Ingala, Carlo Metta, Elia Santi, Raffaele Scandone, Dario Turchetto.

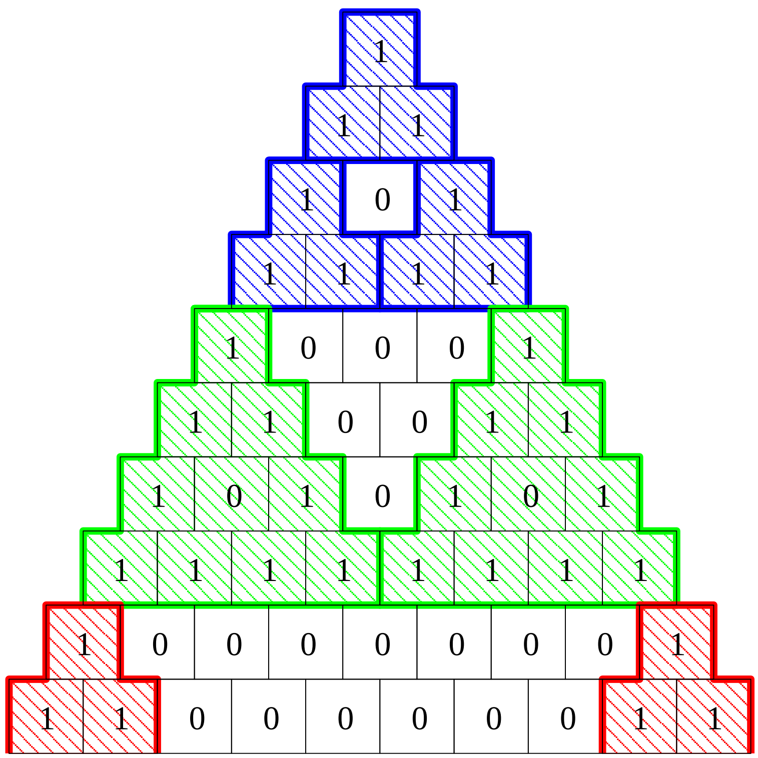
Questa soluzione è stata proposta da Dario Turchetto.

Si prolunghi il lato CB dalla parte di B ed il segmento NM dalla parte di M, e sia P la loro intersezione.

Gli angoli $\widehat{NMA}$ e $\widehat{PMB}$ sono opposti al vertice, gli angoli $\widehat{MAn}$ e $\widehat{MBP}$ sono entrambi retti e i segmenti $AM = MB$ per costruzione, quindi i triangoli MAN e PMB sono congruenti.
I segmenti NM e MP sono allora congruenti e CM è sia altezza che mediana del triangolo PNC, che è quindi isoscele; pertanto CM è anche bisettrice, cioè $\widehat{NCM} = \widehat{MCP} = \widehat{MCB}$.

Soluzione del problema 3 Non ci sono pervenute soluzioni corrette.

Come è noto, il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ con n e k naturali, è il $k+1$ esimo numero della $n+1$ esima riga del triangolo di Tartaglia. Riscriviamo il triangolo di Tartaglia in modulo 2 (ovvero scriviamo 0 al posto di ogni numero pari e 1 al posto di ogni numero dispari). Possiamo riformulare il problema in questi termini: in ogni riga del triangolo di Tartaglia modulo 2, il numero di 1 che compaiono è una potenza di 2.



Proviamo in primo luogo che la $(2^n + 1)$-esima (per $n > 0$) riga contiene un 1 alla estremità sinistra, un 1 all'estremità destra e solo zeri nelle posizioni intermedie.

1. Per $n = 1$ la tesi è evidente.

2. Supponiamo che la tesi sia vera per un certo n e proviamola per $n+1$. Sono evidenti per la regola di composizione del triangolo i seguenti fatti:

   (a) I $2^n - 1$ zeri centrali generano $2^n - 2$ zeri centrali nella $2^n + 2$ esima riga, $2^n - 3$ zeri centrali nella $2^n + 3$ esima riga ed in generale $2^n - 1 - j$ zeri nella $2^n + 1 + j$ esima riga (per $0 \leq j < 2^n$).

   (b) I due 1 alle estremità generano nella $2^n + 1 + j$-esima riga $j + 1$ numeri uguali ai $j + 1$ della $j + 1$-esima riga sia alle estremità destra che sinistra.

   In sostanza le 2^n righe successive alla $2^n + 1$-esima possono essere ottenute dall'unione di tre triangolini più piccoli: il primo con base sulla 2^{2n}-esima riga, che è uguale (cioè costituito dagli stessi numeri negli stessi posti) a quello costituito dalle prime 2^n righe, il secondo con base sulla 2^n-esima riga e vertice sulla $2^{2n} - 1$ esima costituito solo da zeri, il terzo uguale (nell'accezione già detta) al primo. In particolare, la 2^{n+1}-esima riga è data dall'affiancamento di due 2^n-esime righe. Sommiamo per ottenere la $2^{n+1} + 1$-esima riga: poichè somma di uguali numeri superiori, a partire da sinistra si hanno 2^n numeri uguali ai primi 2^n della $2^n + 1$ esima riga (quindi un 1 poi tutti zeri); il numero centrale della $2^{n+1} + 1$-esima riga è uno 0 (dato dalla somma dei due 1 "di estremità"), mentre, simmetricamente, gli altri 2^n numeri sono tutti 0 ed un 1.

   Ciò prova la tesi dell'induzione.

A questo punto utilizziamo i passi centrali della precedente dimostrazione ed usiamo l'induzione estesa per provare che per ogni m nella riga m compare un numero k di 1 che è una potenza di 2:

1. Per $m = 1$, $k = 2^0$, per $m = 2$, $k = 2^1$.

2. Supponiamo che la tesi sia vera per tutti i naturali minori o uguali a m. Se $m + 1$ è della forma $2^n + 1$ allora nella riga $m + 1$-esima compaiono solo due 1, dunque $k = 2^1$. Se invece $m + 1$ è della forma $2^n + 1 + j$ (con $0 < j < 2^n$) allora essa contiene il doppio degli 1 della $1 + j$-esima riga (si veda il punto 2a), che per ipotesi induttiva erano una potenza di 2, quindi a sua volta k risulta una potenza di 2.

Soluzione del problema 4 Una soluzione sostanzialmente corretta ci è pervenuta da Valerio Dose.

Trattiamo il problema in maniera leggermente più generale: supponiamo di avere un settore delimitato da due semirette (partenti da O) che formano tra di loro un angolo α ($0 < \alpha < \pi$), e cerchiamo il taglio più corto che delimiti un triangolo di area fissata A. Se a, b, c sono le lunghezze dei lati del triangolo cercato (dove i primi due hanno un vertice in O), abbiamo — tramite bieca applicazione della trigonometria — le relazioni

1. $ab \sin\alpha = 2A$,
2. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = a^2 + b^2 - 4A\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Ci interessa minimizzare c, che per quanto precede equivale a minimizzare a^2+b^2 con ab costante; si vede facilmente (ad esempio da $a^2+b^2 \geq 2ab$) che il minimo si ottiene solo quando $a = b$, i.e. il taglio delimita un triangolo isoscele.
Tornando al problema originario, un taglio qualunque collega i due cateti (che supponiamo di lunghezza 1) oppure un cateto e l'ipotenusa. Il taglio più corto tra quelli del primo tipo si ha, per la discussione sopra, quando esso delimita un triangolo simile al precedente (con rapporto di omotetia $\sqrt{2}/2$) e quindi è lungo 1.
Consideriamo i tagli del secondo tipo. Osserviamo che, se C è il vertice dell'angolo retto e A, B sono gli altri vertici, i triangoli isosceli costruiti con tagli che partono da C (e "staccano"sull'ipotenusa un lato di lunghezza 1) hanno area maggiore di $1/4$; quindi la discussione precedente applicata ai settori con vertici in A e B, che produce invece triangoli isosceli di area $1/4$, fa ottenere effettivamente tagli contenuti nel triangolo. Otteniamo quindi due tagli simmetrici di lunghezza $2\sqrt{2}-2 < 1$, che sono le soluzioni cercate.

Soluzione del problema 5 Non ci sono pervenute soluzioni corrette.

Lemma 1. *Sia P un polinomio a coefficienti interi e siano a, b due interi. Allora $a - b$ divide $P(a) - P(b)$.*

Dimostrazione. Sia $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Allora

$$
\begin{aligned}
P(a) - P(b) = & \\
& = (a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0) - (a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0) \\
& = a_n(a^n - b^n) + a_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + \ldots + a_1(a - b).
\end{aligned}
$$

Da ogni addendo dell'espressione precedente può essere raccolto un fattore $a - b$, che dunque divide l'intera espressione, ed il lemma è provato. □

Supponiamo ora $P(a) = b$, $P(b) = a$, $P(n) = n$. Per il lemma precedente si ha $n-b \mid P(n)-P(a)$ ovvero $n-b \mid n-a$. Si ha pure $n-a \mid P(n)-P(a)$ ovvero $n-a \mid n-b$. Dunque, poiché a e b sono distinti, deve essere $n-a = -(n-b)$ da cui $n = \frac{a+b}{2}$. Pertanto esiste al più un valore di x per cui $P(x) = x$.

Soluzione del Problema 6 Soluzioni corrette ci sono pervenute da : Simone Di Marino, Valerio Dose, Simone Ferraro, Roberta Guadagni, Salvatore Ingala, Carlo Metta, Elia Santi, Raffaele Scandone.

$61|5^n - 4^n$ se e solo se n è multiplo di 3. Diamo qui due diverse dimostrazioni:

Soluzione 1: Abbiamo $5^3 - 4^3 = 61$, e poichè $a - b|a^n - b^n$ concludiamo subito che $61 = 5^3 - 4^3|5^{3k} - 4^{3k}$ per ogni k, quindi tutti i multipli di 3 vanno bene. Mostriamo che sono le uniche soluzioni: se $n = 3k + 1$, abbiamo $5^{3k+1} - 4^{3k+1} = 5 * 5^{3k} - 4 * 4^{3k} = 5 * (5^{3k} - 4^{3k}) + 4^{3k}$; ora, da prima sappiamo che $61|5^{3k} - 4^{3k}$, quindi se $61|5^{3k+1} - 4^{3k+1}$ allora $61|4^{3k}$, che è chiaramente impossibile. Analogamente si procede se $n = 3k + 2$, scrivendo $5^{3k+2} - 4^{3k+2} = 25 * (5^{3k} - 4^{3k}) + 9 * 4^{3k}$.

Soluzione 2: (proposta da Salvatore Ingala) Vogliamo vedere per quali n è verificata la congruenza $5^n \equiv 4^n \mod 61$. Moltiplichiamo ambo i membri per 49^n (49 è l'inverso moltiplicativo di 5 modulo 61), ottenendo $245^n \equiv 196^n \mod 61$, cioè $13^n \equiv 1 \mod 61$. Poichè $13^1 \equiv 13$, $13^2 \equiv 47$, $13^3 \equiv 1$, e da questo punto in poi i resti si ripetono periodicamente, la congruenza è verificata se e solo se n è multiplo di 3.

Soluzione del problema 7 Soluzioni corrette ci sono pervenute da Elia Santi e Raffaele Scandone. Una soluzione sostanzialmente corretta ci è pervenuta da Carlo Metta.

Calcolare direttamente il numero $A(n)$ delle successioni alternanti non è un'opzione accessibile; si può però ricavare una relazione induttiva.
Chiamiamo $\mathcal{A}(n)$ l'insieme delle successioni alternanti $\{a_i\}$ tali che $a_i \leq n$ per ogni i; il nostro scopo è suddividerlo in due parti $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, di cardinalità rispettivamente $A(n-1)$ e $A(n-2)$.
In $\mathcal{A}_2$ mettiamo, semplicemente, tutte le successioni $\{a_i\}$ di $\mathcal{A}(n)$ tali che in effetti $a_i \leq n - 2$ per ogni i.
Analizziamo quello che resta, cioé $\mathcal{A}_1$. Ad ogni successione $\{a_i\}$ appartenente ad $\mathcal{A}_1$ associamo una successione $\{b_i\}$ di $\mathcal{A}(n-1)$ ottenuta dimenticando l'ultimo termine $\max\{a_i\}$. Ci sono solo due casi:

1. $\max\{a_i\} = n$, e allora $\{b_i\}$ termina con un numero *della stessa parità* di $n - 1$;

2. $\max\{a_i\} = n-1$, e allora $\{b_i\}$ termina con un numero *di parità opposta* a $n - 1$.

Queste osservazioni mostrano che la corrispondenza definita è biunivoca: infatti, partendo da una successione di $\mathcal{A}(n-1)$, basta guardare la parità del suo termine più alto per ricostruire l'(unico) elemento di $\mathcal{A}_1$ da cui proviene.
Ne segue, in breve, $A(n) = A(n-1) + A(n-2)$; siccome $A(1) = 1$ e $A(2) = 2$ risulta $A(n) = \mathcal{F}(n+1)$, dove $\mathcal{F}(n)$ è l'n-simo numero di Fibonacci.

Soluzione del problema 8 Soluzioni corrette ci sono pervenute da Valerio Dose e Elia Santi

Proponiamo due soluzioni, una che sfrutta gli angoli (inviata da Valerio Dose) e una che utilizza le formule per le lunghezze delle tangenti alle circonferenze inscritta e exscritte.

Soluzione 1: Osserviamo innanzitutto che A, I, M e I_a sono allineati, in quanto M è punto medio dell'arco BC e quindi fa parte della bisettrice di $B\widehat{A}C$ a cui appartiene anche I, e I_a appartenendo alle bisettrici degli angoli supplementari di $A\widehat{C}B$ e $A\widehat{B}C$, è equidistante dai prolungamenti di AB e AC, per cui fa parte anch'esso del prolungamento della bisettrice di $B\widehat{A}C$. Notiamo ora che $I\widehat{C}I_a$ è retto perchè somma di angoli che sono la metà di angoli supplementari, così come $I\widehat{B}I_a$. Quindi il quadrilatero $BICI_a$ è inscrivibile in una circonferenza con diametro II_a.
Allora $I\widehat{I_a}C = I\widehat{B}C = \frac{1}{2}A\widehat{B}C$. Inoltre $A\widehat{M}C = I\widehat{M}C = A\widehat{B}C$ perchè insistono entrambi sulla corda AC. Essendo quindi $M \in II_a$ (diametro della circonferenza circoscritta a $BICI_a$ e essendo $I\widehat{M}C = 2I\widehat{I_a}C$, allora M è il centro della cirocnferenza circoscritta a $BICI_a$ ed il punto medio del diametro II_a.

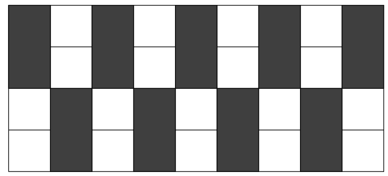
Soluzione 2 : Detto s il semiperimetro di ABC e chiamate a, b, c, le lunghezze dei lati BC, CA, AB rispettivamente, siano H e K i punti in cui cerchio inscritto ed exscritto tangono BC; sia inoltre L il punto medio di BC. Osserviamo che

$$HL = \left|s - b - \frac{a}{2}\right| = \left|\frac{c}{2} - \frac{b}{2}\right| = \left|s - c - \frac{a}{2}\right| = LK$$

Questo dice precisamente che le proiezioni di I e I_a su BC (i punti di tangenza delle due circonferenze) hanno come punto medio la proiezione di M (il punto medio di BC).
Sapendo che I, I_a, M sono allineati lungo la bisettrice di A, il risultato trovato permette di concludere che $IM = MI_a$.

Soluzione del problema 9 Non ci sono pervenute soluzioni.

Disponiamo la scacchiera in modo che si abbiano 4 traverse (righe orizzontali) formate ognuna da n case. Coloriamo le case della scacchiera a colori alterni lungo le traverse, in modo che la prima casa delle quattro traverse sia rispettivamente nera, nera, bianca, bianca (come in figura).
Inoltre diciamo che una casa è *esterna* se appartiene alla prima o all'ultima traversa, altrimenti diciamo che è *centrale*. La scacchiera risulta così composta da n case nere esterne, n case bianche esterne, n case nere centrali e n case bianche centrali.
Una mossa di cavallo uscente da una casa esterna permette di raggiungere solo case centrali dello stesso colore, mentre per saltare da un colore all'altro occorre muoversi da una casa centrale ad un'altra centrale.



Supponiamo per assurdo che esista un percorso di cavallo chiuso che tocchi tutte le case. Allora tale percorso contiene n salti di entrata dalle case nere esterne e altrettanti di uscita, ognuno dei quali raggiunge una casa nera centrale. Ma allora tutte le mosse di entrata e uscita dalle case nere centrali sono già esaurite e non ne restano a disposizione per passare da case nere a case bianche. Il percorso non può perciò raggiungere le case bianche partendo da una casa nera, il che non è possibile.

Bonus question

Dimostreremo che esiste un percorso aperto di cavallo che tocca tutte le case una e una sola volta se e solo se $n = 3$ oppure $n \geqslant 5$.

Sfrutteremo il seguente

Lemma 2. *Un percorso [aperto] di cavallo che tocchi tutte le case una e una sola volta deve iniziare su casa nera esterna, proseguire alternativamente su case nere esterne e centrali fino a toccarle tutte, saltare su casa bianca centrale, alternare case bianche centrali e esterne, per terminare su casa bianca esterna.*

La dimostrazione del lemma segue la stessa linea dimostrativa della prima parte e ne omettiamo i dettagli.

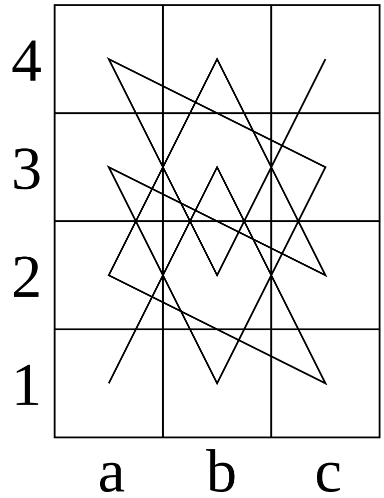
È immediato verificare che per $n = 1$ e $n = 2$ il percorso voluto è impossibile, in quanto non c'è abbastanza spazio per saltare su case di colore diverso.

Caso $n = 3$: il percorso esiste. Utilizzando la notazione algebrica degli scacchi, un esempio è dato dalla sequenza di mosse

$$a1 - b3 - c1 - a2 - b4 - c2 - a3 - b1 - c3 - a4 - b2 - c4.$$

Si noti per inciso che questo percorso è simmetrico rispetto al centro della scacchiera, quindi una volta date le prime sei mosse avremmo potuto ricostruire le rimanenti attraverso una rotazione di 180° della scacchiera.

Caso $n = 4$: il percorso non esiste. Per il lemma, l'ottavo salto del percorso deve necessariamente congiungere case di colore opposto. Supponiamo di aver costruito un percorso come prescritto. Ruotiamo ora la scacchiera di un quarto di giro. Applichiamo di nuovo il lemma, e troviamo che l'ottava mossa deve ancora congiungere case di colore opposto. Ma tale salto ora avviene tra una casa esterna e una centrale e quindi è tra case dello stesso colore. Ciò non può essere e quindi non è possibile costruire tale percorso.



Caso $n = 5$*:* il percorso esiste. Un esempio è

$$b4 - a2 - c1 - e2 - d4 - b3 - a1 - c2 - e1 - d3 - \cdots$$

e completando il percorso per simmetria centrale.
Caso $n = 6$*:* il percorso esiste. Un esempio è dato da

$$b4{-}a2{-}c1{-}e2{-}f4{-}d3{-}e1{-}f3{-}d4{-}b3{-}a1{-}c2{-}e3{-}f1{-}d2{-}c4{-}a3{-}\cdots\ ,$$

Caso $n > 6$*:* dimostreremo per induzione che un percorso aperto di cavallo esiste per tutte le scacchiere $4 \times n$ con $n > 6$
Diciamo che un percorso che fornisce la soluzione è *buono* se la colonna a non contiene né la prima, né l'ultima casa di un certo colore toccate dal percorso.
In particolare, proveremo che se esiste un percorso buono per una scacchiera $4 \times n$, allora esiste un percorso buono anche per una scacchiera $4 \times (n + 2)$.
Si noti che gli esempi forniti nei casi $n = 5, 6$ sono entrambi buoni.
Supponiamo allora dato un percorso buono per una scacchiera $4 \times n$.
La casa $a1$ per ipotesi non è estrema del percorso, quindi il percorso deve contenere la sequenza $b3 - a1 - c2$ (anche se non sappiamo in quale verso).
Analogamente, la casa $a2$ non è l'ultima casella del suo colore toccata, e quindi il percorso deve contenere la sequenza $c1 - a2 - b4$. Lo stesso vale per simmetria per le case $a3$ e $a4$. (Si noti che in questo passaggio stiamo nuovamente sfruttando il lemma.)
Inseriamo tra le colonne a e b, altre due colonne (che chiamiamo a' e b'), ottenendo così una scacchiera $4 \times (n + 2)$. Nel percorso dato, sostituiamo la sequenza $b3 - a1 - c2$ con $b3 - a'4 - a2 - b'1 - c2$; la sequenza $c1 - a2 - b4$ con $c1 - b'2 - a1 - a'3 - b4$ e analogamente per simmetria.

È facile verificare che il percorso così ottenuto è una soluzione buona per la scacchiera $4 \times (n+2)$.

Soluzione del problema 10 Una soluzione corretta ci è pervenuta da Salvatore Ingala. Una soluzione parzialmente corretta ci è pervenuta da Carlo Metta

Sia $A(n)$ l'insieme delle permutazioni di n elementi. Chiamiamo $F(m)$ il sottoinsieme di $A(n)$ formato dalle permutazioni che lasciano fisso m e $\mathrm{Fix}(\sigma)$ il numero di punti fissi della permutazione σ. Si ha allora

$$\sum_{\sigma \in A(n)} \mathrm{Fix}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{F(i)}|$$

in quanto ogni σ appartiene ad esattamente $\mathrm{Fix}(\sigma)$ degli $F(m)$. Ma per ogni k tale che $1 \leq k \leq n$ vi sono esattamente $(n-1)!$ permutazioni che lasciano fisso k, corrispondenti alle permutazioni dei restanti $n-1$ elementi. Pertanto:

$$\frac{\sum_{\sigma \in A(n)} \mathrm{Fix}(\sigma)}{|A(n)|} = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{F(i)}| = \frac{n \cdot (n-1)!}{n!} = 1$$

Soluzione del problema 11 Soluzioni corrette ci sono pervenute da : Simone Di Marino, Salvatore Ingala, Elia Santi.

Questa soluzione è stata proposta da Simone Di Marino.

Per il principio dei cassetti abbiamo che almeno 2 tra x, y e z sono dalla stessa parte rispetto a 1 (ce ne sono sicuramente 2 o entrambi minori di 1 o entrambi maggiori o uguali a 1). Supponendo senza perdita generalità che x e y siano questi due otteniamo che le due terne $(x^2, 1, 1)$ e $(1, 1, y^2)$ sono ordinate in modo opposto e quindi per la disuguaglianza di Chebycheff abbiamo che

$$(x^2 + 1 + 1)(1 + 1 + y^2) \geq 3(x^2 + 1 + y^2)$$

Poi applichiamo Cauchy-Schwarz alle terne $(x, 1, y)$ e $(1, z, 1)$ ottenendo:

$$(x^2 + 1 + y^2)(1 + z^2 + 1) \geq (x + y + z)^2$$

Ma $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \geq 3(xy + yz + xz)$ poichè $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$, una nota disuguaglianza che si può dimostrare ad esempio riscrivendola nella forma $(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0$. Unendo tutto abbiamo la tesi, cioè:

$$(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2) \geq 3(x^2+1+y^2)(1+z^2+1) \geq 3(x+y+z)^2 \geq 9(xy+xz+yz)$$

Soluzione del problema 12 Non ci sono pervenute soluzioni.

Dimostreremo che l'unica funzione che soddisfa l'equazione è $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. Innanzitutto, y compare solo all'interno della $f(\cdot)$, quindi possiamo rimpiazzare $f(y)$ con a e imporre che a stia nell'immagine di f: l'equazione diventa

$$f(x-a) = f(a) + xa + f(x) - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, a \in \operatorname{Im} f. \tag{1}$$

Ora, se poniamo $g(x) := f(x) - 1$ riusciamo a "far sparire" l'1 a destra dell'equazione: riscritta sostituendo per far comparire g al posto di f la (1) diventa

$$g(x-a) = g(a) + xa + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, a \in \operatorname{Im} f.$$

Analogamente, ci accorgiamo dopo un po' di prove che possiamo fare in modo da "far sparire" anche il termine ax ponendo $h(x) = g(x) + \frac{x^2}{2}$: si ha

$$h(x-a) = h(a) + h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, a \in \operatorname{Im} f.$$

Cosa possiamo dire su h? Ponendo $x = a$ abbiamo $h(a) = h(0)/2$, quindi h è costante su tutta $\operatorname{Im} f$. Inoltre, se $a, b \in \operatorname{Im} f$ abbiamo

$$h(x) + h(a) = h(x-a) = h(x-a+b-b) = h(x-a+b) + h(b)$$

quindi, poiché $h(a) = h(b)$ (perché h è costante su $\operatorname{Im} f$), abbiamo

$$h(x) = h(x+b-a) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ossia h è periodica di periodo $b-a$. Abbiamo trovato che i periodi per cui h è periodica sono "molti": se riusciamo a dimostrare che $b-a$ può assumere tutti i valori al variare di b e a in $\operatorname{Im} f$, allora possiamo concludere che h è una funzione costante (è semplice vedere che le uniche funzioni che sono p–periodiche per tutti i $p \in \mathbb{R}$ sono le costanti).
Scegliamo $t \neq 0$ che stia nell'immagine di f (esiste per forza, altrimenti $f(x) = 0$ per ogni x, ma questa funzione non soddisfa l'equazione di partenza). Allora, l'espressione

$$f(x-t) - f(x) = xt + f(t) - 1$$

può assumere tutti i valori reali al variare di $x \in \mathbb{R}$: infatti il termine a destra dell'uguale è suriettivo. Allora per ogni p reale esiste x tale che i due valori $b = f(x-t)$ e $a = f(x)$ stanno in $\operatorname{Im} f$ e sono tali che $b - a = p$, come ci eravamo proposti di dimostrare.
Abbiamo quindi provato che $h(x) = f(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$ è costante, e chiamiamo k il valore che essa assume. Dalla relazione trovata sopra $h(a) = h(0)/2$ segue allora che $k = k/2$ e quindi $k = 0$: cioè, partendo dall'ipotesi che f soddisfasse l'equazione siamo arrivati a dire che

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ora ci resta solo da verificare che questa scelta di f soddisfa l'equazione di partenza, o più semplicemente la (1) che è equivalente ad essa. Per ogni $x, a \in \mathbb{R}$ vale

$$f(x-a) = 1 - \frac{x^2 - ax + a^2}{2}$$

$$f(a) + ax + f(x) - 1 = 1 - \frac{a^2}{2} + ax + 1 - \frac{x^2}{2} - 1 = 1 - \frac{x^2 - ax + a^2}{2}$$

quindi la (1) è un'identità per la nostra scelta di f.