Algebra – Problemi di ammissione

A1. Dimostrare che per ogni a, b, c reali positivi con $abc = 1$ si ha che

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^a(b+c)} \leq \frac{3}{2}.$$

A2. Definiamo una sequenza di polinomi P_0, P_1, ..., P_n, ... nel modo seguente:

- $P_0(x) = x^3 - 4x$
- $P_{n+1}(x) = P_n(1+x)P_n(1-x) - 1$ per ogni $n \geq 0$

Dimostrare che $x^{2020} | P_{2020}(x)$.

A3. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha che

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + 2xy + 1.$$