

PROBLEMI DI AMMISSIONE AL WC 2020
Teoria dei Numeri

1. Siano p un numero primo dispari e $m > 1$, n due interi positivi tali che $\frac{m^{pn} - 1}{m^n - 1}$ sia un numero primo.

Dimostrare che

$$pn \mid (p-1)^n + 1.$$

2. Un insieme di 3 numeri interi positivi si dice una terna pitagorica se i suoi elementi sono le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo. Siano P e Q due terne pitagoriche. Dimostrare che esistono un intero $m \geq 2$ ed m terne pitagoriche P_1, \dots, P_m tali che

$$\begin{cases} P_1 = P, P_m = Q \\ P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset \text{ per ogni } i \text{ con } 1 \leq i \leq m-1. \end{cases}$$

3. Sia K l'insieme di tutti gli interi positivi che nella loro rappresentazione decimale non contengono la cifra 7. Determinare tutti i polinomi $f(x)$ a coefficienti interi non negativi per i quali $f(n) \in K$ per ogni $n \in K$,