Algebra – Allenamenti EGMO 2020 - 1

A1. Siano x, y, z numeri reali tali che $x \neq 1, y \neq 1$ e $x \neq y$. Dimostrare che se

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{zx - y^2}{1 - y},$$

allora

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{zx - y^2}{1 - y} = x + y + z.$$

A2.

a) Dimostrare che esiste una 5-upla di numeri reali non negativi (a, b, c, d, e) tali che $a+b+c+d+e = 1$ con la seguente proprietà: comunque si dispongano i 5 numeri su una circonferenza, esiste una coppia di numeri vicini il cui prodotto è $\geq \frac{1}{9}$.

b) Dimostrare che per ogni 5-upla di numeri reali non negativi (a, b, c, d, e) tali che $a + b + c + d + e = 1$, esiste un modo di disporre i 5 numeri su una circonferenza in modo che per ogni coppia di numeri vicini il loro prodotto è $\leq \frac{1}{9}$.

Combinatoria – Allenamenti EGMO 2020 - 1

C3. Giulia ha raccolto un mucchio di n conchiglie, con n intero positivo e si diletta con il gioco di seguito illustrato; ad ogni turno può scegliere tra una delle seguenti due mosse:

α) se ci sono almeno 5 conchiglie, togliere 5 conchiglie dal mucchio;

β) se il numero di conchiglie attualmente presenti è divisibile per 7, dividerle in 7 mucchietti uguali, toglierne 4 e riunire i 3 restanti in un unico mucchio.

Giulia vince se riesce a togliere tutte le conchiglie dal mucchio iniziale, mentre perde in tutti gli altri casi:

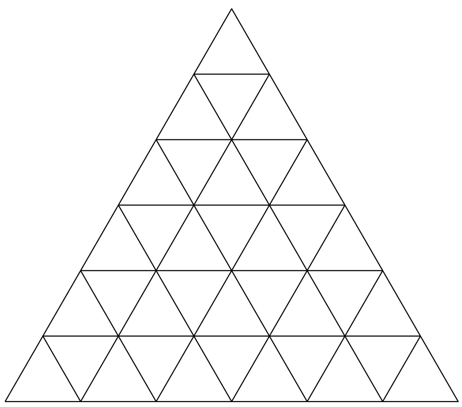
a) per quali n riesce a vincere?

Giulia cambia le regole del gioco, e questa volta vince se alla fine le rimangano esattamente 3 conchiglie.

b) per quali n può vincere in questo nuova versione del gioco?

C4. I confini della pianta della città n-Trilandia formano un triangolo equilatero di lato $2n$ per un certo intero positivo $n \geq 2$. La città ha in tutto $6n$ strade (confini della città compresi), e ogni strada è parallela ad uno dei tre confini, ed in particolare esattamente $2n - 1$ strade interne sono parallele ad uno stesso confine. Prese $2n$ strade parallele tra di loro, queste dividono i rimanenti due confini in tratti di strada lunghi 1.

Ad esempio, 3-Trilandia è fatta così:



Il sindaco di n-Trilandia vuole disporre delle sentinelle agli incroci delle strade, confini compresi. Ogni sentinella riesce a difendere tutte e sole le strade che si intersecano nella sua posizione.

Quante sentinelle al minimo sono necessarie per difendere ogni strada di n-Trilandia?

Geometria – Allenamenti EGMO 2020 - 1

G5. Sia ω una circonferenza di centro O, e P un punto esterno ad essa. Siano A e B i punti di intersezione fra le tangenti uscenti da P e la circonferenza. Preso M sul segmento AB, siano C e D i punti di intersezione della perpendicolare ad OM per M con PA e PB. Dimostrare che M è il punto medio di CD

G6. Sia $ABCD$ un trapezio di basi AD e BC tale che $AB = AD + BC$. Indichiamo con F il punto medio di CD.

a) Dimostrare che la bisettrice dell'angolo $\widehat{DAB}$ incontra CD in F.

Sia ω la circonferenza di diametro CD e J l'intersezione di AF e la bisettrice di $\widehat{ADC}$. Supponiamo che ora ω sia tangente al lato AB in P, costruiamo X l'intersezione di AD e PF, e M e N le proiezioni di J su PF e AD.

b) Dimostrare che X è equidistante da M e N.

Teoria dei Numeri – Allenamenti EGMO 2020 - 1

N7. Determinare tutte le terne (a, b, c) di interi positivi che soddisfano le seguenti condizioni:

$$\mathrm{MCD}(a, 20) = b$$
$$\mathrm{MCD}(b, 15) = c$$
$$\mathrm{MCD}(a, c) = 5$$

Con $\mathrm{MCD}(a, b)$ *si indica il massimo comune divisore tra a e b, ovvero il più grande intero positivo che divide entrambi*

N8. Trovare tutte le terne (m, p, q) che soddisfano

$$2^m p^2 + 1 = q^5$$

dove $m > 0$ è un intero e p e q sono numeri primi.