

Allenamenti EGMO 2019 – 6

1.1 Problemi

A1. Trovare tutti i numeri reali α con la seguente proprietà: per ogni intero positivo n esiste un intero m tale per cui

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{3n}.$$

C2. Sia S un insieme di n vertici in cui sono stati scelti P, Q vertici speciali.

Francesca e Veronica fanno il seguente gioco: a turno a partire da Francesca disegnano un arco che congiunge due vertici di S , senza poter riconnettere due vertici già collegati da un arco, e perde chi disegna l'arco cui cui i vertici speciali vengono a trovarsi nella stessa componente connessa. Determinate chi vince

G3. Dato il triangolo $\triangle ABC$ consideriamo ω_B la circonferenza passante per A, B e tangente in A al lato AC e, simmetricamente, ω_C la circonferenza passante per A, C e tangente in A al lato AB . Sia D il punto di intersezione di ω_B e ω_C , e sia E il punto sulla retta AD tale che $AD = DE$. Dimostrare che E sta sulla circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle ABC$.

N4. Trovare tutti gli interi $k \geq 0$ tali per cui $3^k + 5^k$ sia scrivibile come n^m dove n, m sono interi positivi e $m \geq 2$.