Problemi Allenamenti EGMO - 1

Problemi

A1 Siano a, b, c interi diversi da 0 tali che

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che $|a| = |b| = |c|$.

C1 Alice ama mischiare mazzi di carte e questa volta ha inventato un gioco particolare. Prende un mazzo di carte numerate da 1 a 52 e le ordina. Poi divide il mazzo in due metà, in modo che il primo mazzo sia formato dalle prime 26 e il secondo dalle ultime 26, e le mischia così: la prima carta del secondo mazzo, la prima carta del primo mazzo, la seconda carta del secondo mazzo, la seconda carta del primo mazzo... e così via, alternando i mazzetti e prendendo ogni volta la prima carta. Dopo aver mischiato la prima volta le carte allora saranno in quest'ordine $27, 1, 28, 2, \ldots, 51, 25, 52, 26$.
Allora Alice divide ancora il mazzo in due mazzetti da 26 e mischia ancora le carte, seguendo la stessa regola. Quante volte in totale dovrà mischiare in questo modo le carte per averle nuovamente ordinate da 1 a 52?

G1 Costruiamo esternamente ai lati AB ed AC di un triangolo ABC dei semicerchi (di diametro AB ed AC rispettivamente). Tracciata la tangente comune, siano P e Q i punti di tangenza (P sull'arco AB e Q sull'arco AC). Chiamata X la proiezione di Q su BC e sapendo che l'angolo $\angle PBC$ è retto, dimostrare che il triangolo ABX è isoscele.

N1 Determinare tutte le coppie (x, y) di numeri naturali tali che $x + y$, $x + 2y$ e $2x + y$ sono quadrati perfetti.