

Problemi Allenamenti EGMO - 4

Problemi

A4 Sia $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- a) f è strettamente crescente
- b) $f(x) > -\frac{1}{x}$ per ogni $x > 0$
- c) $f(x) \cdot f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = 1$ per ogni $x > 0$

Determinare $f(1)$.

C4 Alberto e Barbara hanno 2019 lampadine spente in fila ed altrettanti interruttori: ogni interruttore cambia stato (ossia accende o spegne) una sola lampadina. Alberto sfida Barbara a collegare ogni lampadina al proprio interruttore, aiutandola con degli indizi: un indizio di Alberto consiste nello scegliere un sottoinsieme degli interruttori e premerli contemporaneamente, cambiando lo stato delle lampadine.

- a) Supponendo che Alberto giochi in modo casuale (ma senza dare per due volte lo stesso indizio), quanti indizi di Alberto servono al minimo perchè Barbara sia sicura di aver indovinato?
- b) Supponiamo che il gioco funzioni diversamente, e sia Barbara a dire ad Alberto quali e quanti interruttori premere ogni volta. Quanti indizi le servono al minimo per raggiungere il suo scopo?

G4 Sia $\triangle ABC$ un triangolo isoscele su base AB e siano D un punto sul prolungamento del lato AC tale che $AC > CD$ e M il punto medio di BD . La bisettrice dell'angolo \widehat{BCD} interseca BD nel punto N , e la tangente in M al circocerkchio di $\triangle AMD$ interseca BC in P . Dimostrare che i punti A, P, N, M sono conciclici.

N4 Un intero n viene detto *Mozart* se la rappresentazione decimale della successione $1, 2, \dots, n$ contiene tutte le cifre un numero pari di volte.

- a) Mostrare che tutti numeri *Mozart* sono pari.
- b) Mostrare che esistono infiniti numeri *Mozart*.