Algebra – Problemi di ammissione

A1. Dimostrare che per ogni a, b, c reale positivo si ha che

$$\sum_{cyc} \frac{a^4}{1+a^2b} \geq \frac{abc(a+b+c)}{abc+1}$$

A2. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ tali che:

- $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$
- $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$
- $f(xy) = f(x)f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$
- $f(x+y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$ per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$

A3. Sia $p(x)$ un polinomio non costante a coefficienti reali. Definiamo la successione di polinomi $q_n(x)$ per ogni n intero positivo nel modo seguente:

$$q_n(x) = (x+1)^n p(x) + x^n p(x+1)$$

Dimostrare che ci sono solo un numero finito di interi positivi n tali che tutte le radici di $q_n(x)$ siano reali.