

IT'S ME... MARIOMATH!



GARA "INDIVIDUADRE"

17/8/2018

Problema 1 "Mamma mia!"

Peach è stata rapita.

A Mario va il compito di salvarla da Bowser.

Mario: "Mamma mia, è bellissimo. Se muoio, il gioco non ricomincia da capo! Ma quante vite ho?"

Luigi: "In che anno ci troviamo?"

Mario: "2018, vero?"

Luigi: "Esatto. Tu sai che questo numero può essere espresso come somma di potenze intere del numero 2, con esponenti strettamente positivi (maggiori di 0)? La somma degli esponenti di tali potenze è uguale esattamente al numero di vite!"

Quante vite ha Mario?

Problema 2 "It's me... OPS!"

È successa una cosa inaspettata.

Preso dall'emozione e dalla voglia di salvare la principessa Peach, Mario dimentica il suo nome, ma non le lettere che lo compongono.

Luigi: "Questo sì che è un guaio!"

Mario: "Sì, ma ricordo perfettamente che è composto dalle lettere A, I, R, M, O. Facciamo una cosa, ora scrivo tutti gli anagrammi possibili su un foglio, in ordine alfabetico. Che posizione occupa il mio nome?"

Problema 3 "Ma dove mi trovo?"

Mario: "Che confusione, ma dove mi trovo? Mondo 1? Mondo 2?"

Bowser: "MUAHAHAHAHAH! Come pretendi che io ti dica subito il numero del mondo in cui ti trovi? Beh, allora, considera un polinomio $p(x)$ a coefficienti reali. Sai che $p(13) = 2018$ e per un certo primo q , accade che $p(q) = 2000$. Se determini q , ti dirò ovviamente in che mondo ti trovi, perché io sono leale."

Problema 4 "La bandiera"

Per Mario, non c'è momento più emozionante di stringere la bandiera del traguardo.

Soprattutto, perché ama la geometria. La bandiera è forma di un triangolo rettangolo ABC retto in A. La bisettrice dell'angolo ABC divide l'ipotenusa BC in due parti, la prima misura 100, la seconda misura 50.

Quanto vale l'area della bandiera tanto amata da Mario?

Problema 5 "Ma dov'è rinchiusa Peach?"

Mario non ha la più pallida idea di dove sia rinchiusa Peach! Perciò si rivolge a quel

simpatico fungo a pois rossi, di nome Toad.

Mario: "Ma dove si trova, la principessa Peach?"

Toad: "Si trova nel castello reale..."

Mario: "Andiamo male! Io qua di reali conosco solo i numeri! Senti qua questa!

Ci sono tre numeri reali (a , b , c).

Di questi tre numeri reali sappiamo che:

$$a+b+c = 7$$

$$a^2+b^2+c^2 = 17$$

$$a^3+b^3+c^3 = 43$$

Calcola il valore dell'espressione $a^4+b^4+c^4$."

Toad: "Ehm... non è esattamente questo ciò che intendevo!"

Problema 6 "Un mondo strano"

Mario: "Mi trovo su una passerella di infinite caselle. Qua c'è scritto che devo saltare fino alla duemiladiciottesima casella ma devo fare attenzione, una volta lì, a dileguarmi entro n secondi, n è il numero scritto sulla duemiladiciottesima casella.

Nella prima casella c'è scritto 1, nella seconda 2, nella terza 3... nella decima 1, nell'undicesima 0... una concatenazione di numeri interi, in pratica!"

Bowser: "MUAHAHAHAH! Mi stupisci, bravo! Però fai attenzione, perché non potresti fare in tempo a leggere il numero sulla duemiladiciottesima casella, perché lo sto cancellando! MUAHAHAHAH! Ora sta a te, determinare in quanti secondi devi dileguarti una volta giunto lì!"

Problema 7 "Livelli facili"

Mario: "Ehi Luigi! Mi è stato detto che alcuni livelli sono veramente facili! Mi hanno detto che sono tutti quei livelli numerati con interi positivi n , quegli interi n che sono esattamente uguali al quadruplo della somma delle loro cifre. Quanto vale la somma dei livelli facili?"

Luigi: "Fifone! Non cercare solo i livelli facili!"

Problema 8 "Ma quanto è grande, questo mondo?"

Mario: "Mi sono perso, non trovo più il traguardo. Però so solo che il mondo non è illimitato, ma è a forma di un triangolo ABC.

Di questo triangolo ABC sappiamo che $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$.

D è il piede dell'altezza uscente dal vertice B, e in questo punto D troviamo il traguardo. Io invece mi trovo nel punto E, che è il piede dell'altezza uscente dal vertice C.

Sai dirmi, quanta strada devo percorrere per raggiungere il punto D? E se si trattasse di una frazione, rispondi indicando le 4 cifre dopo la virgola del rapporto tra numeratore e denominatore!"

Problema 9 "Che bella cosa, i gettoni!"

Si sa che Mario, quando completa le missioni, riceve un botto di gettoni. Per allontanare malintenzionati, però, non vuole mai dire a nessuno quanti gettoni ha. Il malefico Bowser, che ne è ghiotto, è riuscito a carpire che sono sicuramente meno di 1000.

Ma non è detto tutto! Mario è spiato anche quando si trova a casa solo.

Se raggruppa i gettoni in pile di 7 monete ciascuna, gliene avanzano 3.

Se raggruppa i gettoni in pile di 13 monete ciascuna, gliene avanzano 12.

Se raggruppa i gettoni in pile di 11 monete ciascuna, gliene avanzano 10.

Da bravo matematico, ma anche da gran malvagio, Bowser determina subito quanti gettoni possiede Mario, e sta già progettando un piano malefico per rubarglieli.

Problema 10 "La malvagità di Bowser non ha limiti."

Mario: "Sono di nuovo prigioniero nel castello di Bowser. Basta. Stavolta è stato veramente cattivo! Come faccio a determinare il prodotto delle misure dei lati di un triangolo sapendo solo le misure delle altezze? È impossibile!

E i lati, dove sono? Aiuto!"

Luigi: "Suvvia, non credo sia impossibile. Risolviamolo insieme! Quali sono i dati?"

Mario: "Allora, le tre altezze misurano $\frac{336}{13}$, 24 , $\frac{112}{5}$. Vuole il prodotto dei lati."

Luigi: "Come si fa a darti torto? È stato veramente cattivo!"

Problema 11 "Una strana somma"

Bowser: "Mai Mario ha guadagnato così tanti gettoni. Ma crede di fare il furbo, l'idraulico. Sta volta, per occultare il valore dei gettoni guadagnati, ha usato i numeri triangolari T_n . Caro solutore, saprai certamente che $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Quel furbacchione ha chiamato $F(n)$ ogni somma di questo tipo:

$$F(n) = T_{n-1}T_1 + T_{n-2}T_2 + \dots + T_2T_{n-2} + T_1T_{n-1}$$

Per esempio:

$$F(4) = T_3T_1 + T_2T_2 + T_1T_3.$$

Egli sostiene di aver guadagnato tanti gettoni quanto le ultime 4 cifre di $F(2018)$, ma stavolta è stato davvero bravo, lo ammetto!

Sapete aiutarmi a trovare il numero di gettoni che mi sta nascondendo?"

Problema 12 "Il mondo dei polinomi"

Mario si ritrova catapultato in un mondo strano: il mondo dei polinomi.

Non passerai mai il livello, se non conosci l'algebra.

Mondo Polinomi - Livello 1.

Mario: "Here we go!"

Una volta entrato, egli deve cimentarsi nel seguente problema.

Definiamo $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Sapendo che: $p(1) = 2$; $p(2) = 10$; $p(3) = 30$; $p(4) = 68$

Determina il valore di $p(6)$, se non vuoi essere cacciato fuori a pedate!"

[Se si ritiene che il problema sia impossibile, rispondere indicando 0000]

Problema 13 "Ma quant'è lontana, questa bandiera?"

Mario: "Quanta distanza devo ancora percorrere, per arrivare al traguardo!"

Toad: "Vai tranquillo, è poca. Così poca che riusciresti anche a risolvere qualche problema mentre arrivi!"

Mario: "Vai, proponi!"

Toad: "Dunque, sia data una successione di interi a_n . Sai che:

$$a_1 = 6$$

$$a_{n+1} = a_n + 4n$$

per ogni intero positivo n .

Calcola il valore dell'espressione $\sum_{k=1}^{100} a_k$

Mario: "Fantastico, livello superato. Mamma mia! E ho risolto anche il problema"

Che risposta ha dato Mario?

Problema 14 "Un numero a dir poco gigantesco!"

È stata dura, ma Mario, tra varie difficoltà, è quasi arrivato al problema 18.

Una dura prova lo separa dal raggiungimento del fatidico Mondo 8.

Calcolare le ultime 4 cifre del numero $12361248092147087^{12345678010}$.

Problema 15 "Un polinomio strambo"

Bowser: "Non molli mai, eh? Non l'avrai la principessa Peach. NON L'AVRAI!"

MUAHAHAHAHAH! Non risolverai... NON LO RISOLVERAI MAI QUESTO PROBLEMA! MUAHAHAHAHAHAHAH!

Prendi un polinomio $p(x)$ di grado due. Sia q_n l' n -esimo numero primo.

$p(q_n) = q_{n+1}$ per ogni numero intero compreso tra 1 e 3, estremi inclusi. Calcola $p(10)$.

NON CE LA FARAI! MUAHAHAHAHAHAH!

[Se il risultato è una frazione, dare come risposta le prime 4 cifre dopo la virgola del rapporto tra numeratore e denominatore.]

Problema 16 "Non ci credo."

Mario ha vinto. Peach è di nuovo sua.

Mario: "E un bacino non me lo dai?"

Peach: "Devi essere degno di me. Conosci gli interi congrui a 2, modulo 3?"

Mario: "Certo! 2, 5, 8.."

Peach: "OK! Calcola la seguente somma:

$$\binom{2}{2} + \binom{5}{2} + \dots + \binom{47}{2} + \binom{50}{2}$$

Mario: "Here we go!"

Problema 17 "E un bacino non me lo dai?"

Mario: "E ora un bacino, non me lo dai?"

Peach: "No, non è detto che tu sia degno di me. Ora considera un polinomio $p(x)$ di grado tre, tale che $p(k) = k!$ per ogni intero k compreso tra 1 e 4, estremi inclusi.

Quanto vale $p(5)$?"

Mario sviene

Problema 18 "Thank you!"

Smack!

Tutto finisce qui!

Mario e Peach si sposano, e vissero tutti felici e contenti.

Luigi: "Io sono testimone di nozze. Vi ho preparato la busta. Ricordi il problema 17, il polinomio lì proposto?"

Calcola $p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+\dots+p(15)$

Le ultime quattro cifre di questa somma sono il numero di gettoni che vi ho messo nella busta.

Quanti gettoni vi ho regalato?"

