

Allenamenti EGMO 2018 – 8

Problemi

A1. Siano a, b, c reali positivi tali che $abc = 1$. Mostrare che

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

C2. Ogni numero intero positivo è colorato di azzurro o di rosa. Si sa che:

1. ogni numero dispari è rosa;
2. ogni intero n ha lo stesso colore di $4n$;
3. ogni intero n ha lo stesso colore di almeno uno tra $n+2$ e $n+4$.

Dimostrare che allora tutti i numeri sono rosa.

G3. Sia ABC un triangolo acutangolo con circocentro O . Siano D, E ed F i piedi delle altezze da A, B e C , rispettivamente, e sia M il punto medio di BC . Sia X il punto di intersezione fra le rette AD e EF e sia Y il punto di intersezione fra le rette AO e BC . Sia infine Z il punto medio di XY . Dimostrare che A, Z e M sono allineati.

N4. Trovare tutte le coppie (a, b) di interi positivi tali che

$$\begin{cases} a + b + 1 \mid 2ab \\ a + b - 1 \mid a^2 + b^2 - 1. \end{cases}$$