

Allenamenti EGMO 2018 – 6

Problemi

A1. Determinare tutte le funzioni $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ surgettive tali che per ogni $x \in (0, +\infty)$ valga

$$xf(x) + f(x)f(f(x)) = 2xf(f(x)).$$

C2. Alberto e Barbara giocano su una tabella 2017×2017 . All'inizio, Alberto colora di nero alcune caselle. Poi, a turno iniziando da Barbara, piazzano un sassolino in una casella della tabella. Non è consentito mettere un sassolino né su una casella nera né su una riga o colonna dove c'è già un altro sassolino. Perde chi non può più muovere. Qual è il minimo numero di caselle che Alberto deve colorare di nero per essere sicuro di vincere?

G3. Sia ABC un triangolo acutangolo inscritto nella circonferenza c , con $AB < AC < BC$. La circonferenza di centro A e raggio AC interseca c nel punto D e la retta BC nel punto E . Sia F l'intersezione di AE con c , infine sia G il simmetrico di E rispetto a B . Dimostrare che il quadrilatero $DEFG$ è ciclico.

N4. Sia n un intero positivo dispari e siano a_1, a_2, \dots, a_n interi positivi con prodotto P . Dimostrare che

$$\text{MCD}(a_1^n + P, \dots, a_n^n + P) \leq 2(\text{MCD}(a_1, \dots, a_n))^n.$$