

## Allenamenti EGMO 2018 – 6

### Problemi

**A1.** Determinare tutte le funzioni  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  surgettive tali che per ogni  $x \in (0, +\infty)$  valga

$$xf(x) + f(x)f(f(x)) = 2xf(f(x)).$$

**C2.** Alberto e Barbara giocano su una tabella  $2017 \times 2017$ . All'inizio, Alberto colora di nero alcune caselle. Poi, a turno iniziando da Barbara, piazzano un sassolino in una casella della tabella. Non è consentito mettere un sassolino né su una casella nera né su una riga o colonna dove c'è già un altro sassolino. Perde chi non può più muovere. Qual è il minimo numero di caselle che Alberto deve colorare di nero per essere sicuro di vincere?

**G3.** Sia  $ABC$  un triangolo acutangolo inscritto nella circonferenza  $c$ , con  $AB < AC < BC$ . La circonferenza di centro  $A$  e raggio  $AC$  interseca  $c$  nel punto  $D$  e la retta  $BC$  nel punto  $E$ . Sia  $F$  l'intersezione di  $AE$  con  $c$ , infine sia  $G$  il simmetrico di  $E$  rispetto a  $B$ . Dimostrare che il quadrilatero  $DEFG$  è ciclico.

**N4.** Sia  $n$  un intero positivo dispari e siano  $a_1, a_2, \dots, a_n$  interi positivi con prodotto  $P$ . Dimostrare che

$$\text{MCD}(a_1^n + P, \dots, a_n^n + P) \leq 2(\text{MCD}(a_1, \dots, a_n))^n.$$