Algebra – Problemi di ammissione

A1. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x)f(y) \leq f(xy) \qquad \text{e} \qquad f(x) + f(y) \leq f(x+y),$$

per ogni coppia di reali x, y.

A2. Determinare tutte le coppie di interi a, b per cui esiste un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi tale che

$$(x^2 + ax + b)p(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

con $|c_i| = 1$ per $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

A3. Trovare il più grande reale positivo a tale che per ogni terna di reali positivi x, y, x con $xyz = 1$, vale la disuguaglianza,

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x}{(x+1)(y+a)} \geq \frac{3}{2(1+a)}.$$