

Allenamenti EGMO 2018 – Misto

1.1 Problemi

A1. Trovare tutti i polinomi cubici $f(x)$ a coefficienti interi tale che se $a + b + c = 2$ e $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ allora $f(a) = f(b) = f(c)$.

C2. In ogni vertice di un poligono regolare con 2017 vertici c'è un intero, in modo che la somma degli interi di tutti i vertici sia 1. Scriviamo le somme dei primi k interi in senso antiorario per $k = 1, \dots, 2017$, partendo da un qualche vertice. È sempre possibile scegliere il vertice di partenza in modo che tutte queste somme siano positive?

G3. Sia ABC un triangolo acutangolo, siano inoltre O il suo circocentro e D il punto medio di BC . La circonferenza di diametro AD interseca i lati AB, AC nuovamente in E, F rispettivamente. La retta passante per D parallela ad AO interseca EF in M . Dimostrare che $EM = MF$.

N4. Sia a un numero intero. Dimostrare che esistono infiniti interi b tali che esiste un unico numero primo p della forma $u^2 + 2au + b$ con u intero.