Allenamenti EGMO 2018 – Geometria

1.1 Definizioni e preliminari

Nel corso di questa sessione di geometria, daremo per scontate le nozioni di angolo alla circonferenza, angolo supplementare, disuguaglianza triangolare, i teoremi di Euclide e di Talete, i criteri di congruenza e di similitudine. Iniziamo dunque con delle definizioni e dei risultati preliminari, soprattutto relativi alla geometria del triangolo.

Dato un triangolo ABC chiameremo $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ le lunghezze dei lati e $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$, $\gamma = \angle ACB$ le ampiezze degli angoli di tale triangolo.

Definizione 1.1 (Circonferenze notevoli)**.** Dato un triangolo ABC definiamo

- *circonferenza circoscritta* ad ABC la circonferenza passante per i vertici A, B, C del triangolo;
- *circonferenza inscritta* ad ABC la circonferenza interna ad ABC e tangente ai tre lati del triangolo.

Definizione 1.2 (Rette notevoli)**.** Dato un triangolo ABC definiamo

- l'*altezza* uscente da A come la retta passante per A e perpendicolare al lato BC, opposto ad A (e definiamo il *piede* dell'altezza relativa ad A come il punto di intersezione di questa retta con il lato BC);
- la *bisettrice* (interna) uscente da A come la retta passante per A che divide in due parti uguali l'angolo α;
- la *bisettrice esterna* uscente da A come la retta passante per A che divide in due parti uguali l'angolo complementare ad α in A;
- la *mediana* uscente da A come la retta passante per A e per il punto medio del segmento BC.

Analogamente possiamo dare le stesse definizioni relative ai vertici B e C.

Definizione 1.3 (Punti notevoli)**.** Dato un triangolo ABC definiamo

- l'*ortocentro* di ABC, solitamente indicato con H, come l'intersezione delle altezze del triangolo;
- l'*incentro* di ABC, solitamente indicato con I, come l'intersezione delle bisettrici del triangolo o, analogamente, come il centro della circonferenza inscritta ad ABC;
- il *baricentro* di ABC, solitamente indicato con G, come l'intersezione delle mediane del triangolo;
- il *circocentro* di ABC, solitamente indicato con O, come il centro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC.

Provare a dimostrare che questi punti notevoli sono effettivamente ben definiti, cioè le rette in questione effettivamente concorrono. Infatti in quasi tutte le definizioni abbiamo a che fare con tre rette (altezze, bisettrici, mediane, ecc), che a priori potrebbero non concorrere. Noi dimostreremo tali concorrenze tramite il teorema di Ceva, ma tutte ammettono delle dimostrazioni puramente sintetiche.

1.2 Punti notevoli

In questa sezione esploreremo alcune relazioni fra i punti notevoli di un triangolo, molte delle quali risultano utili come sottocasi di problemi più complessi. Inoltre i seguenti esercizi aiutano ad acquisire un po' di manualità nello sfruttare adeguatamente gli angoli per risolvere problemi.

Esercizio 1.1. Siano A, B, C i vertici di un triangolo, H l'ortocentro di ABC, H_a, H_b rispettivamente i piedi dell'altezza uscente da A e dell'altezza uscente da B. Dimostrare che il quadrilatero AH_bH_aB è inscrittibile in una circonferenza. Qual è il centro di tale circonferenza? [Hint]

Esercizio 1.2. Siano A, B, C i vertici di un triangolo, H l'ortocentro di ABC, H_b, H_c rispettivamente i piedi dell'altezza uscente da B e dell'altezza uscente da C. Dimostrare che il quadrilatero AH_cHH_b è ciclico. [Hint]

Esercizio 1.3. Siano A, B, C i vertici di un triangolo, H l'ortocentro di ABC, H_a, H_b, H_c rispettivamente i piedi delle altezze uscenti da A, B e C. Dimostrare che H è l'incentro di $H_aH_bH_c$. [Hint]

Nei prossimi due esercizi indaghiamo rispettivamente i simmetrici dell'ortocentro rispetto ai lati e i simmetrici dell'ortocentro rispetto ai punti medi.

Esercizio 1.4. Siano A, B, C i vertici di un triangolo, H l'ortocentro di ABC e H'_a il simmetrico di H rispetto al lato BC. Dimostrare che H'_a appartiene alla circonferenza circoscritta ad ABC. [Hint]

Esercizio 1.5. Siano A, B, C i vertici di un triangolo, H l'ortocentro di ABC e H''_a il simmetrico di H rispetto al punto medio di BC. Dimostrare che H''_a appartiene alla circonferenza circoscritta ad ABC. [Hint]

Esercizio 1.6. (Circonferenza di Feuerbach) Siano A, B, C i vertici di un triangolo. Dimostrare che i piedi delle altezze e i punti medi dei lati appartengono ad una stessa circonferenza, detta *circonferenza di Feuerbach*, il cui centro è il punto medio fra ortocentro e circocentro. [Hint]

Esercizio 1.7. (Esistenza degli excentri) Sia ABC un triangolo. Dimostrare che la bisettrice interna di A, la bisettrice esterna di B e la bisettrice esterna di C concorrono in un punto, l'*excentro* relativo ad A, che è il centro di una circonferenza tangente a BC e ai prolungamenti di CA e AB. [Hint]

Esercizio 1.8. Sia ABC un triangolo. Siano M il punto medio dell'arco BC non contenente A nella circonferenza circoscritta ad ABC, I l'incentro di ABC e I_A l'excentro relativo al vertice A. Dimostrare che IBI_AC è inscrittibile in una circonferenza centrata in M. [Hint]

1.3 Omotetia

Per affrontare alcuni esercizi, a volte risulta utile avere in mente la nozione di omotetia, che introduciamo di seguito.

Definizione 1.4 (Omotetia)**.** Un'*omotetia* è una trasformazione geometrica del piano. Per definire un'omotetia è necessario specificare un punto O del piano, detto *centro di omotetia*, e un numero reale λ, diverso da zero, detto *fattore di omotetia*.

Allora, un generico punto P del piano viene mandato, tramite l'omotetia di centro O e fattore λ, nel punto P' tale che:

- i punti O, P, P' sono allineati;
- $OP' = \lambda OP$.

Il segno di λ è da intendersi nel seguente modo: se $\lambda > 0$, P' giace sulla semiretta OP di estremo O; se invece $\lambda < 0$, P' si trova sulla parte opposta a P rispetto a O sulla retta OP.

Un'omotetia può quindi essere vista come una dilatazione o contrazione del piano rispetto a un fissato punto.

È importante osservare che l'omotetia conserva gli angoli e i rapporti tra segmenti. Una qualsiasi retta r sarà mandata, tramite un'omotetia, in una retta parallela a r. Una qualsiasi figura (ad esempio un triangolo, un quadrilatero o una circonferenza) sarà mandata in una copia ingrandita o rimpicciolita di se stessa.

Esercizio 1.9. Siano Γ_1 e Γ_2 due circonferenze tangenti internamente in P, tali che Γ_2 è interna a Γ_1. Sia poi t una retta tangente a Γ_2 in T. La retta t interseca Γ_1 in A, B. Sia M il punto di intersezione della retta PT con Γ_1. Mostrare che M è il punto medio dell'arco AB non contenente P. [Hint]

Grazie al concetto di omotetia, possiamo ora cercare di dimostrare il seguente importante teorema, che ancora una volta relaziona punti notevoli di un triangolo.

Teorema 1.5 (Retta di Eulero)**.** *Sia ABC un triangolo. Siano H, G, O rispettivamente l'ortocentro, il baricentro e il circocentro di ABC. Allora questi tre punti giacciono su una stessa retta, detta* retta di Eulero *di ABC, inoltre vale $GH = 2GO$.*

Esercizio 1.10. Dimostriamo il Teorema 1.5 (Retta di Eulero), seguendo la seguente linea dimostrativa.

- Detti M_A, M_B, M_C i punti medi dei lati di ABC, si noti che l'omotetia di centro G e fattore -2 manda il triangolo $M_AM_BM_C$ nel triangolo ABC.
- Si noti che O è l'ortocentro di $M_AM_BM_C$.
- Poiché un punto di $M_AM_BM_C$ viene mandato tramite l'omotetia nel corrispondente punto di ABC, l'ortocentro di $M_AM_BM_C$ (ovvero O) sarà mandato nell'ortocentro di ABC (ovvero H). Per cui H, G e O sono allineati e $GH = 2GO$.

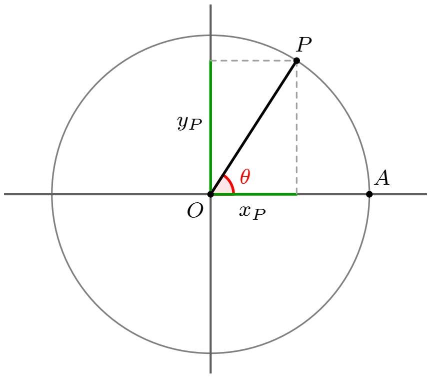
1.4 Trigonometria

Siano dati la circonferenza unitaria nel piano cartesiano di origine O e un punto P di coordinate (x_P, y_P) appartenente ad essa. Sia A il punto $(1, 0)$. Definiamo

$$\cos(\angle AOP) = x_P$$

$$\sin(\angle AOP) = y_P$$

Vale dunque, per ogni angolo θ, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.



Notiamo subito alcune facili periodicità e simmetrie, come, ad esempio:

- $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta\,, \quad \sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$
- $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta\,, \quad \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
- $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta\,, \quad \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta\,, \quad \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$

Un'altra funzione trigonometrica fondamentale è la funzione

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,.$$

Vediamo subito alcuni valori notevoli delle tre funzioni trigonometriche appena incontrate:

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\tan\theta$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	non è definita, ma tende all'infinito se θ tende a $\frac{\pi}{2}$
π	-1	0	0

Esercizio 1.11. Verificare i valori scritti sopra.

Formule

Vediamo adesso alcune formule trigonometriche utili:

1. Formule di addizione:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \\ &= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

2. Formule di duplicazione:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

3. Formule di bisezione:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\cos(\frac{\alpha}{2})} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} = \pm\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} = \\ &= \pm\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\end{aligned}$$

Esercizio 1.12. Calcolare $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ in funzione di $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$.

Esercizio 1.13. Siano $\alpha,\beta,\gamma \in (0,\pi)$. Dimostrare che $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ se e solo se $\tan(\frac{\alpha}{2})\tan(\frac{\beta}{2}) + \tan(\frac{\beta}{2})\tan(\frac{\gamma}{2}) + \tan(\frac{\gamma}{2})\tan(\frac{\alpha}{2}) = 1$. [Hint]

Trigonometria del triangolo

Consideriamo innanzitutto un triangolo rettangolo ABC, dove C è il vertice dell'angolo retto. Con le notazioni descritte nella Sezione 1.1 (Definizioni e preliminari), valgono allora le seguenti relazioni:

$$\cos\alpha = \frac{CA}{AB}, \quad \sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$

e, analogamente:

$$\cos\beta = \frac{BC}{AB}\,,\quad \sin\beta = \frac{CA}{AB}\,.$$

Dunque abbiamo:

$$\tan\alpha = \frac{BC}{CA}\,,\quad \tan\beta = \frac{CA}{BC}\,.$$

Consideriamo ora un triangolo generico ABC e sia D il piede dell'altezza uscente da A. Allora, essendo il triangolo BDA rettangolo, per quanto appena visto vale $AD = AB \cdot \sin\beta = c \cdot \sin\beta$. Allora, l'area del triangolo ABC vale

$$[ABC] = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{1}{2}\,ac\sin\beta\,.$$

Mostriamo ora due fondamentali teoremi di trigonometria del triangolo.

Esercizio 1.14. (Teorema dei seni) Dato un triangolo ABC, vale la seguente relazione fra lati e angoli:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}\,.$$

[Hint]

Esercizio 1.15. (Teorema di Carnot (o del coseno)) Dato un triangolo ABC, vale la seguente relazione fra lati e angoli:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\,.$$

[Hint]

Esercizio 1.16. (Teorema della bisettrice) Sia ABC un triangolo, D il piede della bisettrice uscente da A ed E il piede della bisettrice esterna uscente da A. Allora vale che

$$\frac{c}{b} = \frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EC}\,.$$

[Hint]

Esercizio 1.17. Sia ABC un triangolo rettangolo in B tale che $AB = 10$ e $BC = 24$. Sia M il punto medio di AC. Calcolare $\cos(\angle ABM)$. [Hint]

Esercizio 1.18. (Teorema di Stewart) Dimostrare che, dato un triangolo ABC e un punto D su BC, vale

$$a \cdot (CD \cdot BD + AD^2) = b^2 \cdot CD + c^2 \cdot BD\,.$$

[Hint]

1.5 Ceva e Menelao

Teorema 1.6 (Ceva)**.** *Sia ABC un triangolo e siano D, E, F punti rispettivamente sui segmenti BC, CA, AB. Allora AD, BE e CF concorrono se e solo se*

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1\,. \tag{1.1}$$

Vediamo la dimostrazione del teorema attraverso i seguenti due esercizi.

Esercizio 1.19. Provare che, se le rette AD, BE e CF concorrono in P, allora vale l'Equazione (1.1). Per farlo, provare a scrivere i rapporti coinvolti nell'Equazione (1.1) in funzione delle aree $[APB]$, $[APC]$ e $[BCP]$ [1]. [Hint]

Esercizio 1.20. Mostriamo l'altra implicazione del teorema di Ceva. Supponiamo che valga l'Equazione (1.1) e che per assurdo AD, BE e CF non concorrano. Siano poi $P = BE \cap AD$ e $F' = CP \cap AB$.

1. Dimostrare sfruttando l'esercizio precedente che
$$\frac{AF'}{F'B} = \frac{AF}{FB}\,.$$
2. Dimostrare che $F \equiv F'$ e dedurne che allora AD, BE e CF concorrono.

Il Teorema 1.6 (Ceva) è molto utile per dimostrare che tre rette concorrono, in particolare si può utilizzare per mostrare l'esistenza, per esempio, di baricentro e ortocentro.

Esempio. Le altezze AD, BE e CF del triangolo ABC (in particolare D, E, F appartengono rispettivamente a BC, AC, AB) concorrono, pertanto esiste l'ortocentro.

Infatti, usando un po' di trigonometria, si ottiene che:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{b\cos\alpha}{a\cos\beta} \cdot \frac{c\cos\beta}{b\cos\gamma} \cdot \frac{a\cos\gamma}{c\cos\alpha} = 1\,.$$

Quindi le altezze di un triangolo concorrono.

Esercizio 1.21. Dimostrare che anche il baricentro è ben definito, cioè le mediane di un triangolo concorrono.

Esercizio 1.22. (Punto di Gergonne) Sia ABC un triangolo e γ la sua circonferenza inscritta. Siano D, E, F i punti in cui γ interseca rispettivamente BC, CA, AB. Dimostrare che AD, BE e CF concorrono in un punto detto *punto di Gergonne*.

Teorema 1.7 (Menelao)**.** *Sia ABC un triangolo e siano D, E, F punti rispettivamente sulle rette BC, CA, AB. Indichiamo con AF/FB il rapporto delle lunghezze dei segmenti AF e FB con segno, positivo se F giace all'interno del segmento AB e negativo altrimenti. Analogamente indichiamo BD/DC e CE/EA.*

Allora D, E, F sono allineati se e solo se

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1\,. \tag{1.2}$$

Dimostriamo un'implicazione del Teorema 1.7 (Menelao) nel seguente esercizio.

[1] Dato un triangolo ABC, indichiamo con $[ABC]$ la sua area.

Esercizio 1.23. Sia ABC un triangolo e siano D, E, F punti rispettivamente sulle rette BC, CA, AB. Supponiamo che D, E, F siano allineati e sia r la retta passante per D, E, F. Siano poi A', B', C' le proiezioni di A, B, C su r. Mostrare che allora vale l'Equazione (1.2). [Hint]

Esercizio 1.24. Sia ABC un triangolo. Siano $D \in BC$, $E \in AC$ tali che AD e BE siano bisettrici. Sia poi F il punto di intersezione tra la retta AB e la bisettrice esterna a C. Dimostrare che D, E, F sono allineati. [Hint]

1.6 Ciclicità

Potenza di un punto

Sia Γ una circonferenza di centro O e raggio R. Fissata Γ, a ogni punto P del piano è associato un numero reale, detto *potenza* del punto P rispetto alla circonferenza Γ.

Questo numero si indica con $\mathrm{pow}_\Gamma(P)$ e, per definizione, vale $\mathrm{pow}_\Gamma(P) = OP^2 - R^2$, dove con OP si indica la lunghezza del segmento OP.

Si noti che $\mathrm{pow}_\Gamma(P)$ vale zero se e solo se il punto P appartiene alla circonferenza, è un numero positivo se P è esterno alla circonferenza ed è un numero negativo se P è un punto interno alla circonferenza.

Esempio. Consideriamo la situazione in cui P è esterno alla circonferenza, e tracciamo una tangente t da P alla circonferenza Γ. Detto T il punto di tangenza della retta t con Γ, si noti che, per il teorema di Pitagora sul triangolo POT, vale $\mathrm{pow}_\Gamma(P) = PT^2$, ovvero la potenza di P rispetto a Γ è uguale al quadrato della lunghezza del segmento di tangenza da P a Γ.

Esercizio 1.25. Si verifichi che:

1. se P è esterno alla circonferenza, comunque presa una retta r passante per P che interseca Γ in due punti A, B, vale $\mathrm{pow}_\Gamma(P) = PA \cdot PB$;

2. se P è interno alla circonferenza, comunque presa una corda AB di Γ passante per P, vale $\mathrm{pow}_\Gamma(P) = -PA \cdot PB$.

Esercizio 1.26. Siano A, B, C tre punti su una circonferenza Γ, dove B è il punto medio dell'arco AC. Sia D il punto di intersezione delle tangenti a Γ in A e in B. Sia $E = CD \cap \Gamma$. Si mostri che la retta AE biseca il segmento BD. [Hint]

Assi radicali

Date due circonferenze Γ_1 e Γ_2, abbiamo visto che ad ogni punto P del piano possiamo associare due valori $\mathrm{pow}_{\Gamma_1}(P)$ e $\mathrm{pow}_{\Gamma_2}(P)$. Si verifica facilmente (provate a farlo in geometria analitica!) che il luogo dei punti del piano che hanno la stessa potenza rispetto a due date circonferenze è una retta. Tale retta è chiamata *asse radicale* delle circonferenze Γ_1 e Γ_2.

Esempio. Supponiamo che le circonferenze Γ_1 e Γ_2 si intersechino nei punti X, Y. Poiché X sta su entrambe le circonferenze, si ha $\text{pow}_{\Gamma_1}(X) = 0 = \text{pow}_{\Gamma_2}(X)$, per cui X appartiene all'asse radicale delle due circonferenze. Poiché lo stesso vale per Y, deduciamo che l'asse radicale delle due circonferenze è proprio la retta XY.

Teorema 1.8 (Centro radicale)**.** *Siano Γ_A, Γ_B, Γ_C tre circonferenze, allora i tre assi radicali delle tre coppie di circonferenze concorrono in un punto, detto* centro radicale *delle tre circonferenze.*

Chiamiamo r_{AB}, r_{BC}, r_{AC} i tre assi radicali delle tre coppie di circonferenze e sia inoltre $P = r_{AB} \cap r_{BC}$. Poiché $P \in r_{AB}$ vale $\text{pow}_{\Gamma_A}(P) = \text{pow}_{\Gamma_B}(P)$; poiché invece $P \in r_{BC}$ vale $\text{pow}_{\Gamma_B}(P) = \text{pow}_{\Gamma_C}(P)$. Questo implica $\text{pow}_{\Gamma_A}(P) = \text{pow}_{\Gamma_C}(P)$, ovvero $P \in r_{AC}$.

Questo semplice risultato può rivelarsi molto utile in problemi che chiedano di dimostrare la concorrenza di tre rette.

Esercizio 1.27. Siano Γ_1 e Γ_2 due circonferenze che si intersecano in X, Y. Sia t una tangente comune alle due circonferenze. Detti T_1 e T_2 i punti di intersezione di t con le due circonferenze, e detto M il punto di intersezione delle rette t e XY, si mostri che $MT_1 = MT_2$.

Esercizio 1.28. Sia ABC un triangolo di ortocentro H. Detta Γ la circonferenza circoscritta ad ABC, sia G il punto diametralmente opposto ad A su Γ, sia P il punto di intersezione, distinto da G, della retta GH con Γ. Siano D ed E i piedi delle altezze da B, C. Si mostri che:

1. il pentagono $APDEH$ è ciclico.
2. le rette AP, DE, BC concorrono in un punto.

Teorema di Simson

Concludiamo con il seguente teorema a cavallo fra ciclicità e geometria del triangolo.

Teorema 1.9 (Simson)**.** *Sia ABC un triangolo e sia P un punto generico. Siano inoltre D, E, F le proiezioni di P rispettivamente sulle rette AB, AC, BC. Allora D, E, F sono allineati se e solo se P appartiene alla circonferenza circoscritta ad ABC.*

Esercizio 1.29. Proviamo a dimostrare il Teorema 1.9 (Simson). Supponiamo che P appartenga alla circonferenza circoscritta ad ABC. Possiamo supporre senza perdita di generalità che P appartenga all'arco di circonferenza tra A e C.

1. Mostrare che $BFPD$, $AEPD$, $FCPE$ sono ciclici;
2. Provare che $\angle AED = \angle FEC$, dunque D, E, F risultano allineati.

Per il viceversa, provare a seguire la stessa dimostrazione ma al contrario.

1.7 Hints

Esercizio 1.1: Trovare due angoli retti che insistono sulla stessa corda. (Testo)

Esercizio 1.2: Trovare due angoli congruenti che insistono sulla stessa corda. (Testo)

Esercizio 1.3: Potrebbero essere utili i quadrilateri ciclici visti nei due esercizi precedenti! (Testo)

Esercizio 1.4: Notare che gli angoli $\angle CAB$ e $\angle BH'_aC$ sono supplementari. (Testo)

Esercizio 1.5: Cercare di calcolare più angoli possibile e notare che BH'_aCH è un parallelogramma. (Testo)

Esercizio 1.6: Denotando con M_A, M_B, H_B, H_A rispettivamente i punti medi di BC, AC e i piedi delle altezze uscenti da B e A, si ha che $M_AM_BH_BH_A$ è ciclico. Il centro di tale circonferenza sarà l'intersezione fra gli assi di due dei lati del quadrilatero. Si procede analogamente con gli altri tre lati e si osserva che le tre circonferenze individuate coincidono. (Testo)

Esercizio 1.7: La bisettrice di un angolo è il luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo. (Testo)

Esercizio 1.8: Cercare angoli retti e triangoli iscosceli. (Testo)

Esercizio 1.9: Considerare un'omotetia di centro P che manda Γ_2 in Γ_1. (Testo)

Esercizio 1.13: Per una freccia, utilizzare la formula di bisezione della tangente sostituendo $\gamma = \pi - \beta - \alpha$. (Testo)

Esercizio 1.14: Se D è il piede della retta uscente da A, vale $AD = c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma$. (Testo)

Esercizio 1.15: Sia E il piede della bisettrice uscente da B, allora vale che $CE^2+BE^2 = a^2$, per il teorema di Pitagora. Cercare quindi di esprimere BE e CE in termini dei lati e dell'angolo α. (Testo)

Esercizio 1.16: Utilizzare il teorema dei seni sui triangoli ABD e ADC. (Testo)

Esercizio 1.17: Notare che il triangolo ABM è isoscele. (Testo)

Esercizio 1.18: Sfruttare il teorema del coseno. (Testo)

Esercizio 1.19: Si ha che

$$\frac{BD}{DC} = \frac{[BPD]}{[PDC]} = \frac{[ABD]}{[ADC]} = \dots$$

(Testo)

Esercizio 1.23: Basta mostrare che

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AA'}{BB'}$$

e ciclici. (Testo)

Esercizio 1.24: Usare l'Esercizio 1.16. (Testo)

Esercizio 1.26: Detto $X = AE \cap DB$, si mostri che i triangoli DXE e DXA sono simili. (Testo)

1.8 Problemi

G1. Sia ABC un triangolo rettangolo in A, non isoscele. Sia Γ una circonferenza passante per B e C, che interseca i lati AB e AC in D ed E rispettivamente. Siano inoltre O il centro di questa circonferenza, M il punto medio di BC, S il piede dell'altezza da A e K l'intersezione di DE con AS. Dimostrare che $AMOK$ è un parallelogramma.

G2. Sia AB il diametro di una circonferenza Γ, C un punto su questa, distinto da A e da B. Sia D il punto medio dell'arco AC che non contiene B, E il piede della perpendicolare tracciata da D alla retta BC. Sia $F = EA \cap \Gamma$. Si dimostri che la retta BF biseca il segmento DE.

G3. Sia ABC un triangolo. Sia $A_1B_1C_1$ il triangolo formato dai piedi delle altezze di ABC. Sia $A_2B_2C_2$ il triangolo formato dai punti di tangenza dell'incerchio di $A_1B_1C_1$. Dimostrare che la retta di Eulero di ABC e la retta di Eulero di $A_2B_2C_2$ coincidono.

G4. Sia ABC un triangolo e sia M il punto medio di BC. Sia D l'intersezione tra la circonferenza passante per M e tangente a AB in B e la circonferenza passante per M e tangente a AC in C. Sia infine D' il simmetrico di D rispetto a BC. Dimostrare che A, D', M sono allineati.