

Allenamenti EGMO 2018 – Combinatoria

1.1 Conteggi

Iniziamo con qualche esercizietto di base per riscaldarci.

Esercizio 1.1. Quante sono le possibili password composte da 4 cifre fra 0 e 9? [\[Hint\]](#)

Esercizio 1.2. Quante sono le possibili password composte da 4 cifre fra 0 e 9 *distinte*? [\[Hint\]](#)

Esercizio 1.3. Dati due insiemi A, B di cardinalità a, b rispettivamente, trovare il numero di funzioni e il numero di funzioni *iniettive* da A a B . [\[Hint\]](#)

Esercizio 1.4. Dimostrare che il numero di permutazioni di n elementi distinti è $n!$, dove ricordiamo che

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1. \quad ^1$$

Anagrammi

Esercizio 1.5. Quanti sono gli anagrammi della parola “ALICE”? E della parola “ANNA”?

Esercizio 1.6. Supponiamo di avere n palline, di cui n_1 del colore 1, n_2 del colore 2 e così via, fino ad n_k del colore k . Notare in particolare che $n = n_1 + \dots + n_k$. Dimostrare che il numero di modi di disporre le palline in fila, considerando indistinguibili palline dello stesso colore, risulta

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

[\[Hint\]](#)

Coefficienti binomiali

Esercizio 1.7. In quanti modi possono essere scelti due rappresentanti in una classe di n studenti? [\[Hint\]](#)

L’esercizio precedente si può generalizzare al seguente problema: in quanti modi posso scegliere k elementi da un insieme di n elementi, senza curarsi dell’ordine in cui vengono presi?

La risposta è il *coefficiente binomiale* di n su k , cioè

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}.$$

¹Ricordiamo inoltre che per definizione $0! = 1$.

Supponiamo di decidere i k elementi da prendere in questo modo: mettiamo in fila gli n elementi in qualche ordine e scegliamo i primi k della fila. Il numero di modi di mettere in fila gli elementi è $n!$ (cioè il numero di permutazioni di n elementi); ma quand'è che due permutazioni ci danno la stessa scelta di k elementi? Quando si ottengono una dall'altra permutando i primi k elementi e gli ultimi $n - k$ elementi fra loro!

Dunque nel modo appena descritto stiamo contando ogni scelta di k elementi $k! \cdot (n-k)!$ volte, che corrispondono ai modi di permutare i primi k e gli ultimi $n-k$ elementi. Dunque il risultato è $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, che è proprio quanto volevamo.

Esercizio 1.8. In quanti modi è possibile scegliere la squadra italiana che andrà alle EGMO (composta da 4 ragazze) tra le 24 partecipanti agli allenamenti EGMO?

Esercizio 1.9. Calcolare il numero totale di diagonali di un poligono regolare di n lati.

Esercizio 1.10. Una cavalletta si trova nella casella in basso a sinistra di una tabella $n \times m$ e vuole raggiungerne la casella in alto a destra. Per ottimizzare il percorso, la cavalletta fa solo salti verso l'alto o verso destra e un suo salto la fa sempre muovere dalla casella in cui si trova ad una adiacente.

Quanti sono i possibili percorsi che può effettuare la cavalletta per arrivare a destinazione? [\[Hint\]](#)

Esercizio 1.11. In quanti modi si può scrivere il numero n come somma di k interi positivi, considerando distinti due modi che differiscono anche solo per l'ordine degli addendi? Per esempio nel caso $n = 4$ e $k = 2$, le scritture $1 + 3$ e $3 + 1$ sono considerate distinte. [\[Hint\]](#)

Esercizio 1.12. Dimostrare le seguenti identità di binomiali:

1.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};$$

2.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1};$$

3.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

1.2 Double counting

Il double counting è una tecnica molto utile in combinatoria. Consiste nel contare una quantità desiderata in due modi diversi, e questo spesso permette di ottenere informazioni nuove. Un classico esempio è dato dal conteggio della somma dei numeri da 1 ad n , che vediamo nell'esercizio seguente.

Esercizio 1.13. Trovare una formula chiusa che calcoli la somma dei numeri da 1 ad n .

Consideriamo una tabella con 2 righe ed n colonne. Nella prima riga scriviamo i numeri da 1 ad n in ordine crescente, mentre nella seconda riga scriviamo i numeri in ordine decrescente:

| | | | | |
|-----|-------|-----|-----|-----|
| 1 | 2 | ... | ... | n |
| n | $n-1$ | ... | ... | 1 |

Ora chiamiamo S la somma di tutti i numeri contenuti nella tabella e la calcoliamo in due modi diversi.

Il primo modo è sommare per righe. Abbiamo due addendi: la somma della prima riga e la somma della seconda riga; è evidente che le due somme sono uguali, quindi otteniamo

$$S = \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n i = 2 \cdot \sum_{i=1}^n i.$$

Il secondo modo è sommare per colonne. Osserviamo che ogni colonna ha somma $n+1$ (è questa la ragione per cui li abbiamo scritti in ordine crescente sopra e decrescente sotto!). Quindi otteniamo che

$$S = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) = n \cdot (n+1).$$

Uguagliando le due espressioni si ottiene

$$2 \sum_{i=1}^n i = n(n+1),$$

da cui

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$$

che è la formula che volevamo ottenere.

Esercizio 1.14. Dimostrare che la somma dei numeri dispari fino a $2n-1$ è uguale ad n^2 . [\[Hint\]](#)

Esercizio 1.15. Sia n un numero naturale non nullo. Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 2^n,$$

poiché entrambe le espressioni contano il numero di modi in cui si può pitturare un insieme di n persone con due colori (ogni persona va pitturata o in blu o in rosso). [\[Hint\]](#)

Esercizio 1.16. Determinare il massimo valore di n tale che esiste una sequenza di n numeri reali che rispetta le seguenti condizioni:

1. presi comunque 7 termini consecutivi la loro somma deve risultare strettamente negativa;
2. presi comunque 11 termini consecutivi la loro somma deve risultare strettamente positiva.

[Hint]

1.3 Principio dei cassetti, o pigeonhole

Il principio dei cassetti è estremamente semplice, eppure in certi casi permette di arrivare a conclusioni molto interessanti. L'idea di base, da cui il nome, è la seguente: supponiamo di avere una cassetiera con 8 cassetti. Sappiamo che in totale ci sono 9 camicie nella cassetiera. Allora si può dedurre che c'è almeno un cassetto che contiene almeno 2 camicie. Infatti se nessun cassetto avesse almeno 2 camicie, allora le camicie in totale sarebbero al massimo 8.

L'idea di base è chiara, e la generalizzazione non è molto più difficile.

Teorema 1.1 (Principio dei cassetti, o pigeonhole). *Se abbiamo una cassetiera con n cassetti che in totale contiene k camicie, allora esiste almeno un cassetto che contiene almeno $\lceil \frac{k}{n} \rceil$ camicie.*

È importante osservare bene anche cosa il teorema non dice: non possiamo dire che esistono almeno *due* cassetti tali che ognuno contenga almeno un certo numero di camicie (perché? Provate a trovare un controesempio).

Esercizio 1.17. Dimostrare il teorema.

Esercizio 1.18. Nelle stesse ipotesi del teorema, si può dedurre che esiste almeno un cassetto che contiene *al più* m camicie. Trovare il minimo valore di m .

Esercizio 1.19. Dimostrare che a Firenze esistono due persone che hanno esattamente lo stesso numero di capelli in testa, sapendo che la popolazione di Firenze è di 380 000 abitanti e il numero di capelli massimo sulla testa di una persona è 200 000.

Esercizio 1.20. Veronica si reca a mezzanotte in cucina per fare uno spuntino, ma non volendo svegliare i genitori non può accendere la luce. Apre il cassetto delle merendine. Non riesce a vederle, ma sa che ci sono 13 cornetti alla crema, 15 alla marmellata e 23 al cioccolato.

1. Quante merendine deve prendere al minimo per essere sicura di averne prese almeno 3 dello stesso gusto?
2. Quante ne deve prendere invece per essere sicura di averne almeno una per gusto?

[Hint]

²Dato un numero reale x , il simbolo $\lceil x \rceil$ indica la parte intera superiore di x .

Esercizio 1.21. Giada ha una lavagna su cui ha scritto 27 numeri distinti da 1 a 100, tutti dispari. Dimostrare che esiste una coppia di numeri la cui somma è 102. [Hint]

Esercizio 1.22. Ad aprile (che dura 30 giorni) Alice mangia almeno una mela al giorno. Sappiamo che in tutto il mese mangia 45 mele. Dimostrare che esiste almeno una sequenza di giorni consecutivi in cui ha mangiato esattamente 14 mele. [Hint]

Esercizio 1.23. Consideriamo un numero n e prendiamo dei numeri naturali a_1, \dots, a_n . Dimostrare che è possibile scegliere un sottinsieme (non vuoto) di $\{a_1, \dots, a_n\}$ tale che la somma dei numeri scelti sia divisibile per n . [Hint]

1.4 Invarianti

In molti problemi di combinatoria è utile considerare quantità *invarianti* per le mosse consentite dal problema.

Esercizio 1.24. Francesca si sta annoiando e decide quindi di fare il seguente gioco. Sceglie un numero intero positivo dispari n e scrive alla lavagna i numeri $1, 2, \dots, 2n$. Poi, ad ogni mossa, sceglie due numeri a, b scritti alla lavagna, li cancella e scrive al loro posto il numero $|a - b|$. Dimostrare che il numero scritto alla lavagna alla fine sarà dispari.

Questo è il classico esercizio in cui la prima idea che dovrebbe venire in mente è cercare un invariante. La tesi chiede di dimostrare che il numero alla fine è dispari; quindi cerchiamo una quantità che all'ultima mossa è la parità del numero, all'inizio è dispari e si conserva con le mosse consentite.

Una quantità che rispetta queste proprietà risulta essere la parità della somma dei numeri scritti alla lavagna (in altre parole la congruenza della somma modulo 2). Infatti all'inizio la somma è $1 + 2 + \dots + 2n = n(2n + 1)$, che è dispari perché n e $2n + 1$ sono dispari. La quantità si conserva ad ogni mossa, poiché la somma diminuisce di $2 \min(a, b)$. Inoltre alla fine l'invariante mi dà proprio la parità del numero scritto alla lavagna, che dunque è dispari poiché all'inizio il nostro invariante è dispari.

Esercizio 1.25. Morena ha a gettoni rossi, b gettoni blu e c gettoni verdi. Al negozio di gettoni è possibile consegnare due gettoni di colori diversi e ricevere in cambio un gettone del terzo colore.

Dopo vari scambi al negozio di gettoni a Morena rimane solo un gettone. Dimostrare che il colore di tale gettone non dipende da come Morena ha scelto di scambiarli.

In questo caso il problema è affrontabile con un invariante, ma non in senso classico come nell'esercizio precedente... Proviamo a considerare la parità di a, b e c . Ad ogni mossa la parità di tutti e tre i numeri cambia. Questo dunque non è propriamente un invariante, ma ci dà comunque informazioni interessanti! Infatti, poiché ad ogni mossa la somma del numero di gettoni diminuisce di 1, sappiamo dopo quante mosse (se succede) Morena si ritrova con un solo gettone e di conseguenza sappiamo la parità del numero di gettoni di ciascun tipo alla fine (che dovranno essere pari, pari, dispari in qualche ordine).

Cercate di sistemare i dettagli della dimostrazione per esercizio.

Esercizio 1.26. Clara ha una scacchiera composta da 12 righe e 20 colonne, con caselle di lato unitario. Inoltre ha una pedina posizionata nella casella in alto a sinistra e Clara ha scelto un numero intero positivo r . Clara ha deciso che può spostare la sua pedina da una casella in un'altra solo se la distanza fra i centri delle caselle è \sqrt{r} . Il suo obiettivo è far arrivare la pedina nella casella in alto a destra.

Dimostrare che Clara non potrà raggiungere il suo obiettivo se r è divisibile per 2 o per 3. [Hint]

1.5 Grafi

Definizione 1.2. Un *grafo* è una coppia (V, E) , dove V è un insieme finito $\{v_1, \dots, v_n\}$ (i cui elementi vengono detti *vertici* o *nodi*) ed E è un sottoinsieme delle coppie (non ordinate) ottenibili dagli elementi di V , cioè $E \subseteq \{\{v_i, v_j\} : v_i, v_j \in V \text{ e } i \neq j\}$. I suoi elementi sono detti *archi* o *lati* ed esprimono il fatto che alcuni elementi di V sono messi in relazione.

Informalmente un grafo è un insieme di punti (i *vertici* o *nodi*) di cui alcuni di questi sono collegati tra loro (tramite i *lati* o *archi*). Per chiarire le idee, la seguente figura rappresenta un grafo.

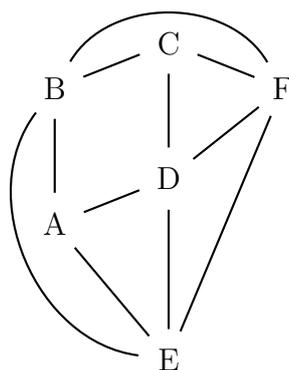


Figura 1: Esempio di grafo.

Introduciamo della terminologia ulteriore sui grafi:

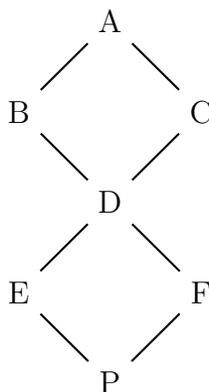
- Il *grado* di un vertice v_k , che si indica con $\deg(v_k)$ è il numero di elementi di E in cui compare v_k , cioè il numero di archi uscenti da v_k .
- Un *cammino* è una successione di vertici w_1, \dots, w_l tali che w_i è collegato a w_{i+1} per ogni $i = 1, \dots, l-1$. Ad esempio in [Figura 1](#) la sequenza di vertici $A-B-C-B-C$ è un cammino. Il cammino è detto *semplice* se non contiene due volte lo stesso nodo.
- Un *ciclo* è un cammino semplice w_1, \dots, w_l tale che inoltre w_1 è collegato a w_l ed $l \geq 3$.
- Si dice che un grafo è *connesso* se per ogni coppia di vertici del grafo esiste un cammino che li collega.
- Un *albero* è un grafo connesso che non contiene cicli.
- Infine un grafo si dice *completo* se ogni coppia di vertici è collegata da un arco.

Esercizio 1.27. Nelle notazioni precedenti, dimostrare che

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Esercizio 1.28. Dimostrare che un grafo connesso con n vertici è un albero se e solo se ha $n - 1$ archi.

Esercizio 1.29. Sia dato il seguente grafo G : unione di due quadrati attaccati per un



vertice dove al posto di ogni vertice c'è una lampadina che può essere accesa o spenta. Una pulce si trova sulla lampadina nel vertice P e vuole dormire. Dunque vuole spegnere tutte le lampadine seguendo gli archi del grafo per poi tornare a riposarsi in P . Tuttavia ogni volta che arriva su una lampadina ne cambia lo stato. Se inizialmente l'unica lampadina accesa è quella nel vertice A , la pulce riuscirà a spegnere tutte le lampadine tornando in P e fare così sogni felici? [\[Hint\]](#)

Cammini euleriani

Definizione 1.3. Si dice che un grafo (V, E) ammette un *cammino euleriano* se esiste un cammino che percorre tutti gli archi del grafo una ed una sola volta.

Intuitivamente tali grafi sono quelli che si possono disegnare senza mai staccare la matita dal foglio.

Esercizio 1.30. Dimostrare che un grafo ammette un cammino euleriano se e solo se è connesso e vale una delle seguenti due condizioni:

- i suoi vertici hanno tutti grado pari;
- contiene esattamente due vertici di grado dispari.

[\[Hint\]](#)

Grafi bipartiti

Definizione 1.4. Un grafo (V, E) si dice bipartito se esistono due sottoinsiemi di V chiamati V_1 e V_2 tali che:

1. $V_1 \cup V_2 = V$
2. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
3. non vi sono archi che collegano vertici appartenenti allo stesso sottoinsieme, ovvero tutti gli elementi di E collegano un elemento di V_1 a uno di V_2 .

Esercizio 1.31. Dimostrare che se un grafo è connesso e i suoi cammini chiusi (cioè con vertice finale che coincide con quello iniziale) hanno tutti lunghezza pari, allora è bipartito. [\[Hint\]](#)

1.6 Colorazioni

L'esempio più famoso di problema di colorazione è il seguente: data una scacchiera 8×8 a cui siano state tolte due caselle d'angolo opposte (come nella [Figura 2](#)) è possibile tassellarla con piastrelle 1×2 ? Le piastrelle devono ricoprire interamente la scacchiera, non possono sovrapporsi tra di loro, devono avere i lati paralleli ai lati della scacchiera e non possono "uscire" dalla scacchiera. La risposta è che non è possibile: infatti ogni piastrella 1×2 copre esattamente una casella nera e una rosa della scacchiera, ma la scacchiera "mutilata" ha 30 caselle rosa e 32 caselle nere.

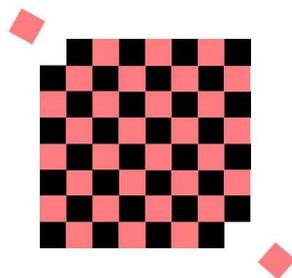


Figura 2: Scacchiera senza due caselle d'angolo opposte.

Di seguito proponiamo altri esercizi che si possono risolvere con questa idea.

Esercizio 1.32. Considerare i 5 possibili tetramini (gli oggetti che si possono formare unendo 4 caselle, in [Figura 3](#)). È possibile formare un rettangolo unendoli tutti e 5? [\[Hint\]](#)

Esercizio 1.33. È possibile ricoprire una tabella 10×10 con 25 tetramini a T (come quello viola nella [Figura 3](#))? [\[Hint\]](#)

A volte due colori non bastano...

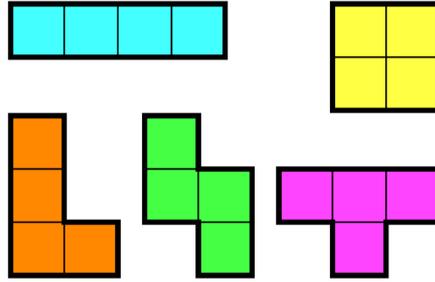


Figura 3: I 5 tetramini.

Esercizio 1.34. È possibile ricoprire una tabella 10×10 con 25 tetramini dritti (come quello azzurro della Figura 3)? [Hint]

Altre volte invece servono colorazioni più fantasiose!

Esercizio 1.35. In una tabella 5×5 c'è un -1 in una casella e un $+1$ in ciascuna delle altre. Una mossa consiste nel cambiare il segno alle caselle di un sottoquadrato $n \times n$ con $n \geq 2$. Per quali posizioni del -1 iniziale è possibile, tramite mosse legali, ottenere $+1$ in tutte le caselle? [Hint]

1.7 Hints

Esercizio 1.1: In quanti modi posso scegliere la prima cifra? E la seconda? ([Testo](#))

Esercizio 1.2: Una volta scelta la prima cifra, in quanti modi posso scegliere la seconda? ([Testo](#))

Esercizio 1.3: Nel primo caso, quanti possibili elementi di B possono essere associati ad ogni elemento di A ? E nel secondo caso? Supponiamo di scegliere un ordine in A in cui assegnare i valori della funzione. In quanti modi possiamo scegliere il valore della funzione nel primo elemento? Nel secondo? E nell' n -esimo? ([Testo](#))

Esercizio 1.6: In un primo momento supponiamo di scrivere un numero da 1 a n su ogni pallina, in modo che siano tutte distinte. Allora il numero di modi di disporre in file le palline è $n!$. A questo punto ritorniamo al problema iniziale, dimenticandoci nuovamente dei numeri scritti sulle palline. Quante volte ho contato ogni disposizione? ([Testo](#))

Esercizio 1.7: Se scegliamo i 2 rappresentanti in ordine, possiamo scegliere il primo in n modi e il secondo in $n - 1$. In questo modo però abbiamo contato tutte le scelte 2 volte (perché?). ([Testo](#))

Esercizio 1.10: Ogni percorso della cavalletta può essere rappresentato da un'unica sequenza di $n - 1$ frecce \uparrow e $m - 1$ frecce \rightarrow (perché?). A questo punto il problema si riconduce a calcolare tutte le possibili sequenze di questo tipo, che equivale a calcolare i modi di scegliere le $n - 1$ posizioni sulle $n + m - 2$ possibili in cui mettere una freccia \uparrow . ([Testo](#))

Esercizio 1.11: Provare a pensare il problema come i modi di “dividere” in k gruppi una sequenza di n palline disposte in fila. Un modo per scegliere la divisione è per esempio scegliere le k palline che saranno alla fine di ogni gruppo. ([Testo](#))

Esercizio 1.14: Disegnare una griglia $n \times n$ e contarne le celle in modo furbo. ([Testo](#))

Esercizio 1.15: Una colorazione in rosso e blu di n persone si può effettuare decidendo di che colore pitturare ogni persona oppure decidendo quali persone colorare di rosso... ([Testo](#))

Esercizio 1.16: Scrivere una sequenza di numeri incogniti e cercare di capire di che segno devono essere certe somme. Ad esempio se

$$x_1 + \cdots + x_7 < 0,$$

$$x_1 + \cdots + x_{11} > 0,$$

cosa posso dire di $x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}$? Ragionare così fino ad arrivare ad un assurdo (cioè che qualche somma deve essere sia maggiore di zero che minore di zero), capendo da quale m in poi l'assurdo funziona. Infine costruire una sequenza di $m - 1$ numeri reali che rispetti le ipotesi, mostrando così l'ottimalità della soluzione. ([Testo](#))

Esercizio 1.20: Le due domande sembrano simili, ma in realtà sono molto diverse. Una sola delle due è riconducibile al principio dei cassetti. In particolare, in un caso la risposta dipende dai numeri 13, 15 e 23, nell'altro caso invece no. (Testo)

Esercizio 1.21: Accoppiamo i numeri dispari da 1 a 100 che hanno somma 102, cioè $(3, 99), (5, 97), \dots, (49, 53)$. I dispari tra 1 e 100 che non stanno in nessuna di queste coppie sono 1 e 51. Se supponiamo per assurdo che nessuna coppia di numeri scelti abbia somma 102, quanti numeri abbiamo preso al più? (Testo)

Esercizio 1.22: Chiamare a_1, \dots, a_{30} il numero di mele mangiate ogni giorno e studiare i valori di $a_1 + \dots + a_k$ al variare di k . (Testo)

Esercizio 1.23: Considerare le possibili classi di congruenza modulo n , e poi lasciarsi ispirare dall'esercizio precedente. (Testo)

Esercizio 1.26: Clara può spostare la pedina dalla casella (a_1, b_1) alla casella (a_2, b_2) se $(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = r$. Se r è divisibile per 2, allora $a_1 - a_2$ e $b_1 - b_2$ devono essere tutti e due pari o tutti e due dispari. Dunque la parità di $a_i + b_i$ è costante (perché?). All'inizio però questo numero è pari $(1 + 1)$ e alla fine è dispari $(1 + 20)$.

Se invece r è divisibile per 3, allora $a_1 - a_2$ e $b_1 - b_2$ devono essere entrambi divisibili per 3 (perché?). Di conseguenza $a_i + b_i$ è costante modulo 3, ma all'inizio è 2 e alla fine è 0. (Testo)

Esercizio 1.29: Notare che tutti i cammini chiusi hanno lunghezza pari e ragionare sulla parità delle lampadine cambiate ad ogni ciclo. (Testo)

Esercizio 1.30: Condizione necessaria: considerare un cammino euleriano e dedurre la connessione e la condizione sul grado (se un cammino giunge ad un vertice attraverso un arco esce da esso per un arco diverso dal precedente, a meno che non sia il vertice finale del cammino).

Condizione sufficiente: a meno di creare un arco fittizio fra i due vertici di grado dispari, si può supporre che il grado di tutti i vertici sia pari. Dunque considerare il cammino C di lunghezza massima che passa per archi tutti distinti. Ora supporre per assurdo che esista un lato non attraversato dal cammino C e dimostrare che allora è possibile allungare il cammino.

Il punto fondamentale è che se il grado di ogni vertice è pari e sto percorrendo un cammino che non ripassa mai da un arco già attraversato, quando arrivo in un vertice avrò sempre modo di uscirne, a meno di non essere ritornata al vertice iniziale. (Testo)

Esercizio 1.31: Fissare un vertice v e definire $d(w)$ come la minima lunghezza di un cammino da v a w , per ogni vertice $w \in V$. A questo punto definire V_1 come l'insieme dei vertici per cui $d(w)$ è pari e V_2 come l'insieme dei vertici per cui $d(w)$ è dispari. (Testo)

Esercizio 1.32: Quali possono essere le dimensioni di base e altezza del rettangolo? Se si colora il rettangolo a scacchiera, quante sono le caselle bianche e quelle nere? Quante caselle bianche e quante caselle nere copre ciascun tetramino? (Testo)

Esercizio 1.33: No, non è possibile. Colorare la tabella a scacchiera e ricordarsi che 25 è un numero dispari. ([Testo](#))

Esercizio 1.34: Colorare la tabella con 4 colori A, B, C, D in modo che ogni tetramino debba necessariamente coprire un A , un B , un C e un D . Poi contare quante caselle ci sono per ciascun colore. ([Testo](#))

Esercizio 1.35: Se il -1 sta nella casella centrale, è possibile: come si fa? Altrimenti non è possibile. Coloriamo infatti la colonna centrale di nero e lasciamo le altre 20 caselle bianche. Ogni volta che si cambia il segno di un quadrato, cosa succede alla parità delle caselle bianche che contengono -1 ? In questo modo si conclude che il -1 deve stare nella colonna nera; ma il ragionamento si ripete scambiando righe e colonne. ([Testo](#))

1.8 Problemi

C1. Durante un ballo ogni donna balla con almeno un uomo e nessun uomo balla con tutte le donne.

Dimostrare che esistono due uomini U ed U' e due donne D e D' tali che U balla con D , U' balla con D' , ma U non balla con D' e U' non balla con D .

C2. Alle EGMO quest'anno ci sono $3n!$ concorrenti. Ogni coppia di ragazze parla esattamente di uno fra n hobby, alternativi alla matematica, di cui sono appassionate.

Dimostrare che ci sono 3 ragazze che parlano fra loro dello stesso hobby.

C3. Dato un intero positivo n , definiamo $P(n)$ come il numero di permutazioni $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ tali che $k\sigma(k)$ è un quadrato perfetto per ogni $k = 1, \dots, n$.

Trovare il minimo n tale che $P(n)$ è multiplo di 2017.

C4. Dimostrare che la somma degli elementi minimi di tutti i possibili sottoinsiemi di k elementi dell'insieme $\{1, \dots, n\}$ è $\binom{n+1}{k+1}$.