

Allenamenti EGMO 2017 – Algebra

1.1 Funzioni

Siano A e B due insiemi. Una *funzione* $f : A \rightarrow B$, cioè da A (detto *dominio*) a B (detto *codominio*), è una cosa che associa ad ogni elemento di A un elemento di B . Inoltre diciamo che la funzione f è:

- *iniettiva* se ad ogni elemento di B corrisponde al più un elemento di A , cioè se $f(x_1) = f(x_2)$ con $x_1, x_2 \in A$ allora $x_1 = x_2$;
- *suriettiva* se ogni elemento di B è *immagine* di almeno un elemento di A , cioè per ogni $y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$;
- *bigettiva* se è sia iniettiva che suriettiva.

Esempio. Consideriamo gli insiemi $A = \{Alice, Francesca, Giada, Morena\}$ e $B = \{mela, fragola, mirtillo, pera, pesca\}$. La funzione che associa ad ogni ragazza il suo frutto preferito fra quelli a disposizione è una funzione.

Supponiamo per esempio che Alice preferisca le fragole, Giada i mirtilli e Francesca e Morena le pere. Questa funzione non è iniettiva perché Francesca e Morena preferiscono entrambe le pere. Inoltre la funzione non è nemmeno surgettiva, perché nessuno preferisce le pesche e le mele.

Esempio. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione tale che $f(x) = x$, cioè la funzione identità dall'insieme \mathbb{R} dei numeri reali in se stesso. Tale funzione è facilmente bigettiva.

Esercizio 1.1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$f(x + f(y + f(z))) = y + f(x + z).$$

Dimostrare che f è bigettiva. [\[Hint\]](#)

Equazioni funzionali

Un'equazione funzionale è un'equazione che coinvolge una funzione. Generalmente in un esercizio con un'equazione funzionale viene chiesto di trovare tutte le funzioni che la rispettano. Presentiamo di seguito un esercizio di questo tipo.

Esercizio 1.2. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(x^2) - f(y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)). \quad (1.1)$$

Essendo la prima equazione funzionale che affrontiamo, proponiamo anche una guida alla soluzione:

- Sostituire $y = 0$ nell'equazione iniziale e chiamare $a = f(0)$, per ottenere

$$f(x^2) = x(f(x) + a) + a. \quad (1.2)$$

- Utilizzare l'Equazione (1.2) sia per x che per $-x$ e unire le due equazioni ottenute sfruttando che $f((-x)^2) = f(x^2)$. Ottenere quindi che

$$x(f(x) + a) + a = -x(f(-x) + a) + a. \quad (1.3)$$

- Sostituire $y = -x$ nell'equazione iniziale e utilizzare nell'Equazione (1.3) la relazione ottenuta. Concludere che $f(0) = a = 0$.
- Utilizzare che $a = 0$ nell'Equazione (1.2) e sostituire quanto ottenuto nell'equazione iniziale. Notare che l'unica possibilità è che valga $f(x) = \lambda x$ per qualche numero reale λ .
- Sostituire nell'equazione iniziale $f(x) = \lambda x$ per verificare che effettivamente la rispetti.

L'ultimo punto non è da trascurare in ogni equazione funzionale. È infatti importante controllare sempre che ogni soluzione trovata rispetti effettivamente l'equazione iniziale!

Polinomi

Un *polinomio* p è una funzione della forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ dove a_0, \dots, a_n sono numeri fissati detti *coefficienti*. Il dominio e l'insieme di appartenenza dei coefficienti possono essere i numeri naturali \mathbb{N} , i numeri interi \mathbb{Z} , i numeri razionali \mathbb{Q} , i numeri reali \mathbb{R} o i numeri complessi \mathbb{C} .

Il numero n è detto *grado del polinomio*¹ e il polinomio p è detto *monico* se $a_n = 1$. Inoltre diciamo che λ è una radice del polinomio p se $p(\lambda) = 0$.

Esercizio 1.3. Sia p un polinomio a coefficienti interi e siano $h, k \in \mathbb{Z}$ due interi. Dimostrare che

$$h - k \mid p(h) - p(k). \quad ^2$$

[Hint]

Esercizio 1.4. Sia $p(x) = x^2 + ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e siano λ_1, λ_2 le sue radici. Trovare il valore delle seguenti espressioni in funzione di a, b :

1. $\lambda_1 + \lambda_2$;
2. $\lambda_1 \cdot \lambda_2$;
3. $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$;
4. $\lambda_1^3 + \lambda_2^3$.

[Hint]

¹Stiamo assumendo che a_n sia diverso da zero.

²Il simbolo \mid significa "divide".

1.2 Disuguaglianze

Riarrangiamento

Siano $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ dei numeri reali positivi. Sia poi $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ una *permutazione*, cioè una funzione bigettiva dall'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$ in se stesso. La disuguaglianza di riarrangiamento dice che

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^n a_i b_{n-i+1}.$$

Il simbolo di sommatoria \sum indica che si stanno sommando tutti i termini facendo variare l'indice i da 1 a n ; per chiarezza, la disuguaglianza di riarrangiamento è quindi:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \dots + a_n b_{\sigma(n)} \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

La disuguaglianza, informalmente, ci sta dicendo che se abbiamo due liste ordinate di numeri che vogliamo *accoppiare* a due a due senza ripetizioni, per massimizzare la somma dei prodotti delle coppie dobbiamo prenderli in ordine, per minimizzarla dobbiamo prenderli in ordine inverso.

Esercizio 1.5. Provare la disuguaglianza di riarrangiamento nel caso $n = 2$ (cioè dimostrare che se $a_1 \leq a_2$ e $b_1 \leq b_2$ si ha che $a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq a_1 b_2 + a_2 b_1$).

Dimostriamo ora la disuguaglianza nel caso generale. Dimostriamo inizialmente la disuguaglianza a sinistra. Supponiamo che la permutazione σ non sia l'identità: allora esistono due indici $i < j$ compresi tra 1 e n tali che $\sigma(i) > \sigma(j)$ (perché?).

Esercizio 1.6. Considerare la funzione $\tau : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ definita come

$$\tau(k) = \begin{cases} \sigma(j) & \text{se } k = i, \\ \sigma(i) & \text{se } k = j, \\ \sigma(k) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrare che τ è una permutazione e dimostrare che $\sum_{k=1}^n a_k b_{\tau(k)} \geq \sum_{k=1}^n a_k b_{\sigma(k)}$. [\[Hint\]](#)

Se τ non è l'identità, si può ripetere quello che è stato fatto nell'esercizio, fino a quando dopo un numero finito di passi (perché finito?) si arriva alla funzione identità, che è il membro sinistro della disuguaglianza che volevamo dimostrare.

Esercizio 1.7. Dimostrare ora la disuguaglianza a destra, cioè che

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^n a_i b_{n-i+1}.$$

[\[Hint\]](#)

Esercizio 1.8. Siano $x, y, z > 0$. Dimostrare che $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$. [\[Hint\]](#)

Cauchy-Schwarz

Siano a_1, \dots, a_n e b_1, \dots, b_n dei numeri reali. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz afferma che

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Vediamo come si può dimostrare questa disuguaglianza. Sia x un'indeterminata, consideriamo il polinomio $p(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x - b_i)^2$. Questo polinomio è di secondo grado e $p(x) \geq 0$ per ogni x , quindi avremo $\Delta \leq 0$.

Esercizio 1.9. Calcolare il discriminante Δ di $p(x)$ (ricordarsi che data un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ il discriminante è $\Delta = b^2 - 4ac$) e verificare che si ottiene esattamente la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Esercizio 1.10. (Lemma di Titu) Dimostrare che se $a_1, \dots, a_n > 0$ e $b_1, \dots, b_n > 0$ allora

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{\sum_{i=1}^n b_i}.$$

[[Hint](#)]

Medie

D'ora in poi supponiamo di avere n numeri reali positivi a_1, \dots, a_n . Elenchiamo di seguito varie medie che si possono calcolare per n numeri reali positivi:

- media aritmetica $AM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$;
- media geometrica $GM = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$;
- media quadratica $QM = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2}$;
- media armonica $HM = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right)^{-1}$.

Valgono le seguenti disuguaglianze tra le medie: $HM \leq GM \leq AM \leq QM$.

Esercizio 1.11. Dimostrare che $AM \leq QM$, cioè che

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2}.$$

[[Hint](#)]

Esercizio 1.12. Dimostrare che $HM \leq AM$. [[Hint](#)]

Esercizio 1.13. (Difficile) L'obiettivo di questo esercizio è dimostrare che $GM \leq AM$.

1. Dimostrare che $GM \leq AM$ vale per $n = 2$.
2. Ora dimostrare che vale per $n = 4$.
3. Dimostrare che $GM \leq AM$ per $n = 3$.
4. (Generalizzazione del punto 2) Dimostrare che se $GM \leq AM$ vale con n allora vale anche con $2n$.
5. (Generalizzazione del punto 3) Dimostrare che se $GM \leq AM$ vale con n allora vale con $n - 1$.
6. Usando tutto questo, concludere che $GM \leq AM$ vale per ogni n .

[Hint]

1.3 Successioni

Progressione aritmetica

Una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una *progressione aritmetica* di ragione k se $a_{n+1} - a_n$ è costante e pari a k per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero se $a_{n+1} = a_n + k$ per ogni $n \geq 0$.

Esempio. I numeri naturali sono una progressione aritmetica di ragione 1 e termine iniziale 0.

Dimostriamo per induzione su n che se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una progressione aritmetica di ragione k vale che $a_n = nk + a_0$.

Passo Base: Se $n = 0$ la tesi è ovvia, infatti $a_0 = a_0 + 0 \cdot k$.

Passo Induttivo: Supponiamo che $a_n = nk + a_0$ e dimostriamo che $a_{n+1} = (n+1)k + a_0$.

Per definizione sappiamo che $a_{n+1} = a_n + k$ e per ipotesi induttiva vale che $a_n = nk + a_0$, perciò $a_{n+1} = nk + a_0 + k = (n+1)k + a_0$.

Esercizio 1.14. Dimostrare che la somma dei primi n numeri naturali è $\frac{n(n+1)}{2}$, cioè

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

[Hint]

Esercizio 1.15. Trovare la somma dei primi n termini di una generica progressione aritmetica di ragione k in funzione del primo termine a_0 .

Progressione geometrica

Una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una *progressione geometrica* di fattore α se $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ è costante e pari ad α per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero se $a_{n+1} = \alpha a_n$ per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 1.16. Dimostrare che, se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una progressione geometrica di fattore α , vale che $a_n = \alpha^n a_0$ per ogni $n \geq 0$. [Hint]

Esercizio 1.17. Trovare la somma primi n termini di una generica progressione geometrica $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di fattore α in funzione del primo termine $a_0 \in \mathbb{R}$ della successione. [Hint]

Successioni per ricorrenza

In generale una successione di $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è detta *per ricorrenza* se esiste una funzione f tale che $a_n = f(a_{n-1}, \dots, a_{n-k}, n)$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, cioè a_n è esprimibile come funzione di n e dei k termini precedenti della successione.

Esercizio 1.18. Calcolare i termini a_1, a_3, a_7 per le seguenti successioni per ricorrenza:

1. $a_0 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 5$ per ogni $n \geq 0$;
2. $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = -1, a_{n+1} = a_n a_{n-2} + n$ per ogni $n \geq 2$.

Esercizio 1.19. Consideriamo la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ data da $a_{n+1} = ha_n + k$ per $n \geq 0$ e a_0 fissato. Trovare la formula esplicita per a_n in funzione di a_0, h, k . [Hint]

Esercizio 1.20. Trovare la formula esplicita per la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ del punto 1 dell'[Esercizio 1.18](#).

Consideriamo ora le successioni che dipendono linearmente dai due termini precedenti, cioè $a_{n+2} = ha_{n+1} + ka_n$ con a_0 e a_1 fissati.

Esercizio 1.21. Sia $a_{n+2} = ha_{n+1} + ka_n$ e siano λ_1, λ_2 le due radici del polinomio $x^2 - hx - k = 0$ (detto *polinomio caratteristico* associato alla successione per ricorrenza).

1. Dimostrare che $a_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n$ per α, β tali che $\alpha + \beta = a_0$ e $\alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 = a_1$.
2. Calcolare esplicitamente α e β in funzione di $\lambda_1, \lambda_2, a_0, a_1$.

Esercizio 1.22. I *numeri di Fibonacci* sono una particolare successione per ricorrenza definita da

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{per ogni } n \geq 0. \end{cases}$$

1. Trovare la formula esplicita per F_n .
2. Dimostrare che $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$ per ogni $n \geq 1$.

[Hint]

Esercizio 1.23. Sia $p(x) = x^2 + ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e siano λ_1, λ_2 le sue radici, come nell'[Esercizio 1.4](#). Trovare la ricorrenza rispettata dalla successione $a_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n$.

1.4 Hints

Esercizio 1.1: Provare a sostituire $x = z = 0$. A questo punto notare che nell'immagine di f ci stanno tutti i numeri reali, quindi f è surgettiva. Perché f è anche iniettiva? Cosa succederebbe se $f(y_1) = f(y_2)$? (Testo)

Esercizio 1.3: Se scriviamo $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, vale che $p(h) - p(k) = \sum_{i=0}^n a_i (h^i - k^i)$. A questo punto concludiamo poiché $h - k$ divide $h^i - k^i$ per ogni $i \geq 0$ (perché?). (Testo)

Esercizio 1.4: Se λ_1 e λ_2 sono le radici di p , allora vale che $p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$. Dunque $a = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ e $b = \lambda_1 \lambda_2$. (Testo)

Esercizio 1.6: Per la seconda parte: si possono cancellare tutti i termini in cui k è diverso da i e da j ; poi bisogna ricordarsi che $i < j$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$. (Testo)

Esercizio 1.7: Applicare la disuguaglianza sinistra alle due n -uple $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ e $-b_n \leq -b_{n-1} \leq \dots \leq -b_1$. (Testo)

Esercizio 1.8: Supponendo senza perdita di generalità che $x \leq y \leq z$, come sono ordinati $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ e $\frac{1}{z}$? (Testo)

Esercizio 1.10: Applicare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz alle seguenti n -uple: $(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \dots, \frac{a_n}{\sqrt{b_n}})$ e $(\sqrt{b_1}, \dots, \sqrt{b_n})$. (Testo)

Esercizio 1.11: Elevare al quadrato entrambi i membri e ricondursi a usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz sulle n -uple (a_1, \dots, a_n) e $(1, \dots, 1)$. (Testo)

Esercizio 1.12: Utilizzare Cauchy-Schwarz. (Testo)

Esercizio 1.13: Per il punto 2, chiamare $b_1 = \frac{a_1+a_2}{2}$ e $b_2 = \frac{b_1+b_2}{2}$; allora si ha che $AM(a_1, a_2, a_3, a_4) = AM(b_1, b_2)$. Utilizzare quindi $AM \leq GM$ sui b_i e successivamente sulle coppie (a_1, a_2) e (a_3, a_4) .

Per il punto 3, sapendo che vale per $n = 4$, data una terna (a_1, a_2, a_3) chiamare $a_4 = (a_1 a_2 a_3)^{1/3}$ e applicare $AM \leq GM$ alla quaterna (a_1, a_2, a_3, a_4) . (Testo)

Esercizio 1.14: Procedere per induzione su n . (Testo)

Esercizio 1.16: Procedere per induzione su n . (Testo)

Esercizio 1.17: Come si fattorizza $x^{n+1} - 1$? (Testo)

Esercizio 1.19: Questa successione è simile ad una progressione geometrica di fattore h , ma "traslata" di k , provare quindi a considerare la successione $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ data da $b_n = a_n + z$ per qualche $z \in \mathbb{R}$ (da determinare opportunamente). (Testo)

Esercizio 1.22: Per il punto 2, procedere per induzione su n . (Testo)

1.5 Problemi

A1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non costante. Dimostrare che esistono $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $f(x + y) < f(xy)$.

A2. Siano $0 \leq a_1, \dots, a_n \leq 1$ numeri reali con $n \geq 1$. Dimostrare che

$$a_1 + \dots + a_n \leq a_1 a_2 \dots a_n + n - 1.$$

A3. Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la successione per ricorrenza definita da

$$\begin{cases} a_0 = 4, a_1 = 11, \\ a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n \quad \text{per ogni } n \geq 0. \end{cases}$$

Calcolare la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

A4. Trovare tutte le $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$.