

# Traccia di soluzione di G2 Mattino PreIMO 2016

Gioacchino Antonelli

June 17, 2017

Il testo con le lettere vere: Sia  $ABC$  un triangolo e sia  $(K)$  la sua circonferenza inscritta che interseca  $AC$ ,  $CB$  e  $BA$  rispettivamente in  $L$ ,  $Q$  e  $P$ . Sia  $D \in AC$  e siano  $(F)$  e  $(E)$  le circonferenze inscritte in  $ABD$  e  $DBC$ . Sia  $X$  il punto su  $BD$  tale che  $BX = BP = BQ$ , allora  $X$  appartiene alla tangente comune esterna di  $(F)$  e  $(E)$  che non è  $AC$ .

Passo intermedio:  $\angle FLE = 90$ . Per dimostrarlo faccio quanto segue. Detti  $T$  e  $U$  i punti di tangenza di  $(F)$  e  $(E)$  con  $BD$ , e  $H$  e  $I$  i punti di tangenza di  $(F)$  e  $(E)$  con  $AC$ , allora si nota che  $HL = DU$  e  $LI = DT$ . La tesi è equivalente alla similitudine fra  $FHL$  e  $LIE$  e cioè a  $HL \cdot LI = FH \cdot EI$  e cioè  $DU \cdot DT = FT \cdot EU$  che è equivalente alla similitudine di  $TFU$  e  $UDE$ , che è vera poiché  $\angle FDE$  è retto. A questo punto per questioni di congruenza dei triangoli corrispondenti si ha che  $\angle FXT = \angle FLD$  e  $\angle UXE = \angle ELI$ . Dunque  $\angle FXE = 90$  per quanto mostrato nella prima parte, ma allora considerando le altre tangenti  $XH_1$  e  $XG_1$  a  $(E)$  e  $(F)$  rispettivamente, si ha  $\angle H_1XG_1 = 180$  e dunque  $H_1, X, G_1$  allineati e perciò si ha la tesi.