Allenamenti EGMO 2017

5 aprile 2017

Sommario

Raccoglieremo qui i testi, gli hints e le soluzioni dei problemi proposti come Allenamenti EGMO 2017, di cui trovate tutte le informazioni alla pagina http://www.oliforum.it/viewtopic.php?f=21&t=20044. Questo file sarà via via aggiornato nel corso delle sessioni. Se avete qualsiasi correzione o commento, potete contattarci all'indirizzo email `allenamenti.egmo@gmail.com`.

Clara Antonucci
Alessandra Caraceni
Camilla Casamento Tumeo
Federica Cecchetto
Giulia Cornali
Alice Cortinovis
Giada Franz
Morena Porzio
Vittoria Ricciuti
Giulia Trevisan
Angela Veronese
Federica Zanni

Indice

1 Sessione: 7 novembre - 20 novembre

A1

Mostrare che se un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi è primo per ogni x intero, allora è costante.

[Hint] [Soluzione]

C1

Sia X un insieme finito e sia $f : X \to X$ una funzione senza punti fissi. Dimostrare che posso colorare con 3 colori gli elementi di X in modo che x ed $f(x)$ hanno colori diversi per ogni $x \in X$.

[Hint] [Soluzione]

G1

Due circonferenze sono tangenti internamente in un punto T. Sia AB una corda della circonferenza grande tangente alla circonferenza piccola in un punto P. Dimostrare che la retta TP è la bisettrice dell'angolo $\widehat{ATB}$.

[Hint] [Soluzione]

N1

Determinare tutti gli interi positivi n per cui $n^4 + 4$ è un primo.

[Hint] [Soluzione]

2 Sessione: 21 novembre - 4 dicembre

A2

Siano a, b reali positivi tali che $a + b = 1$. Dimostrare che

$$\left(a + \frac{2}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{2}{b}\right)^2 \geq \frac{81}{2}\,.$$

[Hint] [Soluzione]

C2

Abbiamo un grafo completo di n vertici, cioè ci sono n vertici e c'è un arco che congiunge ogni coppia di vertici. Vogliamo colorare tutti gli archi e tutti i vertici in modo che:

- due archi che toccano lo stesso vertice siano sempre di colori diversi;
- ogni vertice abbia colore diverso da ognuno degli archi che passano per quel vertice.

Qual è, in funzione di n, il minimo numero di colori necessario per eseguire una colorazione di questo tipo? [Hint] [Soluzione]

G2

Sia ABC un triangolo scaleno, sia L il piede della bisettrice di $\widehat{BAC}$ e sia K il piede della bisettrice di $\widehat{ABC}$. L'asse di BK interseca la retta AL in un punto M. Sia N un punto sulla retta BK tale che LN è parallelo a MK. Dimostrare che $LN = NA$. [Hint] [Soluzione]

N2

Determinare tutte le coppie (p, q) di numeri primi tali che $p^3 - q^5 = (p + q)^2$. [Hint] [Soluzione]

3 Sessione: 22 febbraio - 7 marzo

A3

Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f(xy) \leq xf(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. [Hint] [Soluzione]

C3

Ci sono n città in uno stato. Alcune di esse sono collegate da voli nazionali. Ogni volo connette esattamente due città e se c'è un volo da A a B c'è un volo anche da B ad A. È noto che per ogni coppia di città c'è un unico tragitto per raggiungere la seconda dalla prima usando al massimo due voli. Nessuna città è collegata a tutte le altre con voli diretti.

Dimostrare che $n - 1$ è un quadrato di un intero. [Hint] [Soluzione]

G3

Sia ABC un triangolo rettangolo in C e sia G il suo baricentro. Sia P il punto sulla retta AG tale che $\angle CPA = \angle BAC$, e sia Q il punto sulla retta BG tale che $\angle CQB = \angle ABC$. Dimostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli AQG e BPG si intersecano sul lato AB. [Hint] [Soluzione]

N3

Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $3^x - 5^y = z^2$, con x, y, z interi positivi. [Hint] [Soluzione]

4 Sessione: 8 marzo - 21 marzo

A4

Trovare tutti i polinomi $p(x)$ a coefficienti reali tali che $p(x) \cdot p(x^2) = p(x^3)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. [Hint] [Soluzione]

C4

Giada e Federico giocano ad un gioco. Hanno messo in fila $n \geq 5$ pile di monete, che hanno rispettivamente $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$ monete ciascuna. Una mossa consiste nel scegliere 5 pile e togliere una moneta da ognuna delle pile scelte. Perde chi non può più muovere. Chi vince, se inizia Giada? [Hint] [Soluzione]

G4

Sia ABC un triangolo e sia Γ la sua circonferenza circoscritta. Sia ω una circonferenza tangente ad AB, AC in P, Q rispettivamente e internamente a Γ in S. Sia T l'intersezione fra PQ e AS. Dimostrare che $\angle BTP = \angle CTQ$. [Hint] [Soluzione]

N4

Una successione $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ di numeri naturali è tale che $a_{n+1} = a_n + b_n$, per $n = 1, 2, \ldots$, dove b_n è la cifra delle unità di a_n. Dimostrare che la sequenza contiene infinite potenze di 2 se e solo se a_1 non è divisibile per 5. [Hint] [Soluzione]

5 Sessione: 22 marzo - 4 aprile

A5

Dati x, y, z reali positivi, mostrare che

$$(1 + x^3)(1 + y^3)(1 + z^3) \geq (1 + xyz)^3 \,.$$

[Hint] [Soluzione]

C5

Anna e Bob hanno davanti un rettangolo di $n \times m$ caselle e giocano al seguente gioco: a turno selezionano una casella e la eliminano, eliminando cosí anche tutte le caselle che si trovano in alto a sinistra di questa (cioè vengono eliminate tutte le caselle ancora presenti nel rettangolo che ha come vertice in basso a destra la casella scelta). Chi sceglie la casella in basso a destra perde. Inizia Anna. Chi vince? [Hint] [Soluzione]

G5

Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso con $AB = CD$. Siano ABE e CDF due triangoli esterni ad $ABCD$ tali che $\angle ABE = \angle DCF$ e $\angle BAE = \angle CDF$. Dimostrare che i punti medi di AD, BC ed EF sono allineati. [Hint] [Soluzione]

N5

Determinare il più piccolo intero positivo $a \geq 2$ per il quale esistono un primo p e un intero positivo $b \geq 2$ tali che

$$\frac{a^p - a}{p} = b^2 \,.$$

[Hint] [Soluzione]

6 Hints

Hint per A1: Il valore di $p(0)$ deve essere primo. Cosa succede ponendo poi come x tale valore o un suo multiplo? (Testo)

Hint per C1: Costruire il grafo che ha come vertici gli elementi dell'insieme X e ha un arco fra $x \in X$ e $y \in X$ se e solo se $f(x) = y$ o $f(y) = x$. Questo grafo ha una struttura molto particolare, quale? (Testo)

Hint per G1: Cercare di spostare gli angoli sfruttando le ciclicità, le tangenze e aiutandosi con l'omotetia che manda la circonferenza piccola in quella grande. (Testo)

Hint per N1: Sfruttare la fattorizzazione $n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$. (Testo)

Hint per A2: Utilizzare le disuguaglianze fra medie per stimare i termini risultanti dallo svolgimento dei quadrati nella disuguaglianza del testo. (Testo)

Hint per C2: È facile dimostrare che sono necessari almeno n colori. Mostrare quindi una colorazione esplicita che utilizza esattamente n colori. Notare innanzitutto che è sufficiente colorare gli archi opportunamente. Per farlo numerare i vertici da 1 a n e poi assegnare tramite un'opportuna funzione degli indici degli estremi un numero (cioè un colore) ad ogni arco. (Testo)

Hint per G2: Mostrare che il quadrilatero $ABMK$ è ciclico, e non è l'unico quadrilatero ciclico... (Testo)

Hint per N2: Ridurre modulo q e, sfruttando le informazioni ottenute, ridurre poi modulo q^2. A questo punto i casi rimasti sono molto pochi per stime di grandezza. Per esempio notare che difficilmente può valere $p > q^2$. (Testo)

Hint per A3: Provare a sostituire $x = \frac{1}{y}$ con $y \geq 0$ e cercare poi una disuguaglianza per f "nel verso opposto" rispetto a quella appena ottenuta. Analogamente trattare il caso negativo. (Testo)

Hint per C3: Considerare una città a e prendere $b_1, \ldots, b_k$ le città a lei collegate. Osservare innanzitutto che data un'ulteriore città, questa deve conoscere esattamente una delle città b_i. Infine mostrare che per ogni $i = 1, \ldots, k$ l'insieme delle città diverse da a collegate a b_i ha dimensione $k - 1$. (Testo)

Hint per G3: Notare che AC tange la circonferenza circoscritta a CPG e utilizzare le potenze rispetto alle circonferenze presenti. (Testo)

Hint per N3: Studiando l'equazione modulo 5, ricondursi ad un'altra equazione, da cui si può concludere per esempio studiando altri opportuni moduli. (Testo)

Hint per A4: Confrontare i coefficienti dei monomi di grado più alto di $p(x) \cdot p(x^2)$ e $p(x^3)$. (Testo)

Hint per C4: Vince sempre Giada e una sua strategia vincente è iniziare togliendo una moneta dalla prima pila e dalle ultime quattro pile. (Testo)

Hint per G4: Usare che se R è un punto su Γ e la tangente a ω da R tange ω in T, allora RS/RT è costante al variare di R su Γ (in particolare questo è l'esercizio di geometria della Sessione 6 degli Allenamenti EGMO 2016). (Testo)

Hint per N4: Notare che, se a_1 non è divisibile per 5, la successione dei b_n è periodica e molto facile da calcolare. (Testo)

Hint per A5: Sviluppare i prodotti e cercare di utilizzare $AM \geq GM$. (Testo)

Hint per C5: Mostrare che vince Anna tramite un ragionamento per assurdo. (Testo)

Hint per G5: La geometria sintetica non è sempre la scelta migliore... (Testo)

Hint per N5: Distinguere i casi in cui p divide o non divide a e notare che due quadrati non possono essere troppo vicini. (Testo)

7 Soluzioni

Soluzione di A1: Per ipotesi $p(0) = q$ deve essere primo e inoltre vale che

$$p(x) = xr(x) + p(0) = xr(x) + q\,,$$

con $r(x)$ polinomio a coefficienti interi.

Ponendo ora $x = nq$, con n intero, troviamo

$$p(nq) = nqr(nq) + q = q(nr(nq) + 1)\,.$$

Per ipotesi anche $p(nq)$ deve essere primo per ogni $n \in \mathbb{Z}$, ma l'unico modo in cui questo può accadere è ponendo $nr(nq) + 1 = 1$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, cioè $nr(nq) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Questo implica che il polinomio $xr(xq)$ ha infinite radici e di conseguenza è il polinomio nullo, il che equivale a dire che $r(xq)$ (e quindi $r(x)$) è il polinomio nullo. Abbiamo quindi ottenuto che $p(x) = q$, che è quanto volevamo. (Testo)

Soluzione di C1: Nel corso della dimostrazione utilizzeremo il linguaggio e alcuni fatti basilari di teoria dei grafi, in particolare riguardanti gli alberi. Potete trovare tali nozioni (e molte altre) per esempio alle pagine https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_(discrete_mathematics) e https://en.wikipedia.org/wiki/Tree_(graph_theory).

Costruiamo il grafo orientato che ha come vertici gli elementi dell'insieme X e ha un arco fra $x \in X$ e $y \in X$ se e solo se $f(x) = y$ o $f(y) = x$. Il problema si riconduce quindi a colorare i vertici del grafo in modo che due vertici collegati da un arco abbiamo colori diversi.

Innanzitutto supponiamo senza perdità di generalità che tale grafo sia connesso, poiché per risolvere il problema basta colorare indipendentemente le varie componenti connesse. Notiamo inoltre che, detta n la cardinalità di X, il numero di archi di tale grafo è minore o uguale ad n; basta infatti immaginare di costruire il grafo dal punto di vista dei vertici, allora, scorrendo i vertici, per ogni vertice x dovremmo aggiungere al più l'arco fra x ed $f(x)$ (se già non è presente).

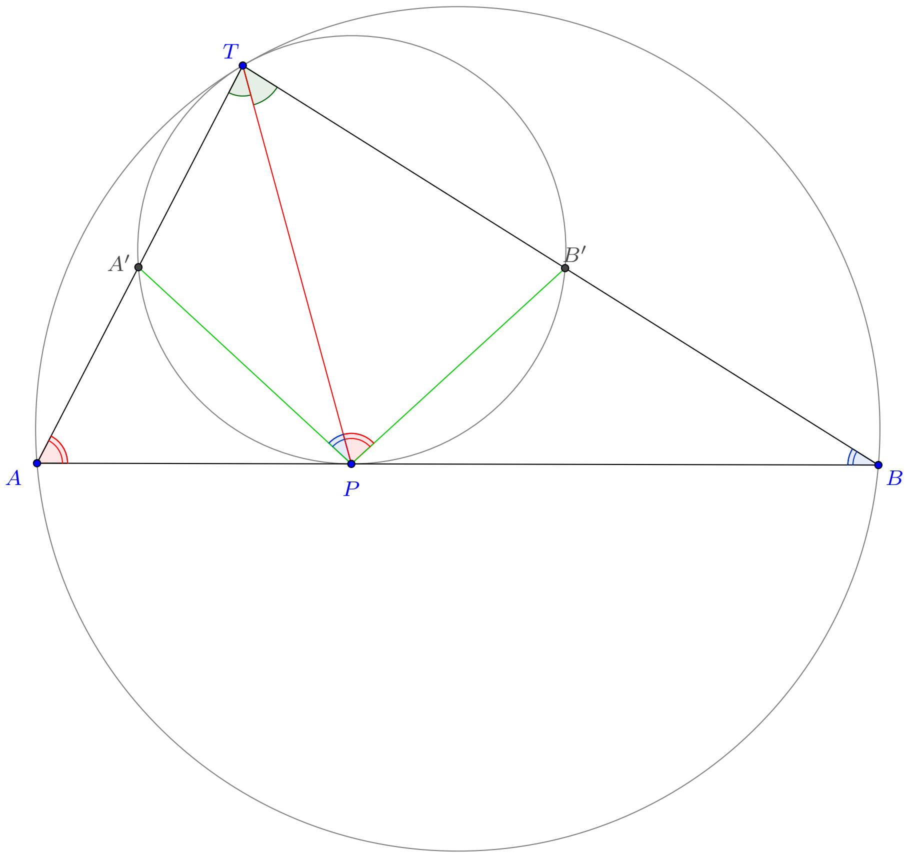
Abbiamo quindi un grafo connesso con n vertici e m archi con $m \leq n$. Affinché il grafo sia connesso il numero di archi deve essere almeno $n - 1$, abbiamo quindi due casi:

- $m = n - 1$, allora il grafo è un albero. In tal caso possiamo pensare di radicare l'albero in un vertice qualsiasi e colorarlo a partire dalla radice: radice di colore A, i suoi figli di colore B, i figli dei suoi figli di colore A e così via. In questa situazione ci bastano quindi due colori.

- $m = n$, allora il grafo è costituito esattamente da un ciclo con delle diramazioni ad albero. Infatti in tale grafo deve esistere almeno un ciclo (altrimenti avrebbe $n - 1$ archi) e togliendo un arco di tale ciclo otteniamo ancora un grafo connesso, che ha però $n - 1$ archi ed è quindi un albero. In questo caso iniziamo colorando il ciclo alternando i colori. È facile mostrare che sono sufficienti due colori se il ciclo ha lunghezza pari e sono invece necessari tre colori se ha lunghezza dispari. A questo punto coloriamo le diramazioni ad albero esattamente come fatto nel caso precedente, con la differenza che la radice è già colorata in quanto appartiene al ciclo.

Ciò conclude la nostra dimostrazione, in quanto siamo riusciti a colorare il grafo come richiesto. (Testo)

Soluzione di G1: Chiamiamo A' e B' rispettivamente le intersezioni diverse da T dei segmenti AT e BT con la circonferenza piccola.



Tramite l'omotetia di centro T che manda la circonferenza piccola in quella grande, gli archi TA' e TB' vengono mandati rispettivamente negli archi TA e TB. Quindi gli angoli sottesi a tali archi nelle circonferenze piccola e grande rispettivamente sono uguali, cioè $\angle TPA' = \angle TBA$ e $\angle TPB' = \angle TAB$.

Nota. Era possibile arrivare a tale conclusione evitando l'omotetia e considerando gli angoli con la tangente alle due circonferenze nel punto T.

Inoltre $\angle TB'P = 180° - \angle TA'P = \angle PA'A$ e, poiché avevamo anche $\angle B'PT = \angle A'AP$, i due triangoli $\triangle TB'P$ e $\triangle PA'A$ sono simili. Di conseguenza $\angle B'TP = \angle A'PA = \angle ATP$, dove l'ultima uguaglianza vale perché sono angoli che insistono sulla stesso arco $A'P$. Questo conclude il problema, poiché abbiamo mostrato $\angle BTP = \angle ATP$. (Testo)

Soluzione di N1: Vale che

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)\,.$$

Perciò, affinché n^4+4 sia primo, deve valere $n^2-2n+2 = 1$ (sono entrambi interi positivi e questo è il termine più piccolo). Questo è equivalente a $0 = n^2-2n+1 = (n-1)^2$, cioè $n = 1$, da cui si ottiene l'unica soluzione $n^4 + 4 = 5$. (Testo)

Soluzione di A2: Svolgendo semplicemente i quadrati e raccogliendo $a^2 + b^2$, abbiamo che

$$\left(a + \frac{2}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{2}{b}\right)^2 = (a^2 + b^2)\left(1 + \frac{4}{a^2 b^2}\right) + 8\,.$$

D'altra parte ricordiamo che valgono le disuguaglianza $QM \geq AM \geq GM$ (che stanno per media quadratica, aritmetica e geometrica rispettivamente), cioè

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}\,,$$

quindi abbiamo che

$$a^2 + b^2 \geq \frac{(a + b)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

e inoltre

$$\frac{1}{a^2 b^2} \geq \frac{16}{(a + b)^4} = 16\,.$$

Applicando tali disuguaglianze al nostro problema otteniamo quindi

$$\left(a + \frac{2}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{2}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}(1 + 4 \cdot 16) + 8 = \frac{81}{2}\,,$$

che è proprio la disuguaglianza cercata. (Testo)

Soluzione di C2: Sono ovviamente necessari almeno n colori, poiché quantomeno ogni vertice e gli $(n-1)$ archi passanti per tale vertice devono essere di colori diversi.

Mostriamo quindi che n colori sono sufficienti. In particolare è sufficiente mostrare che è possibile colorare gli archi in modo che due archi che toccano lo stesso vertice abbiamo colori diversi. Infatti poi si conclude colorando ogni vertice dell'unico colore che non ha nessun arco che passa per tale vertice.

Innanzitutto numeriamo i vertici da 1 a n, poi coloriamo l'arco fra i vertici i e j di colore $i+j \pmod n$ (dove abbiamo identificato gli n colori con i numeri da 0 a $n-1$, cioè le possibili congruenze modulo n).

A questo punto è facile vertificare che due archi che passano per lo stesso vertice k in questo modo hanno sempre colori diversi. Questo perché, se $i \neq j$ e $1 \leq i, j \leq n$, allora $k+i \not\equiv k+j \pmod n$. Abbiamo dunque colorato gli archi come volevamo e concluso il problema. (Testo)

Soluzione di G2: Osserviamo innanzitutto che il quadrilatero $ABMK$ è ciclico, infatti vale facilmente che la bisettrice ad un angolo di un triangolo incontra la circonferenza circoscritta in un punto che sta sull'asse del lato opposto a tale angolo. Perciò abbiamo che

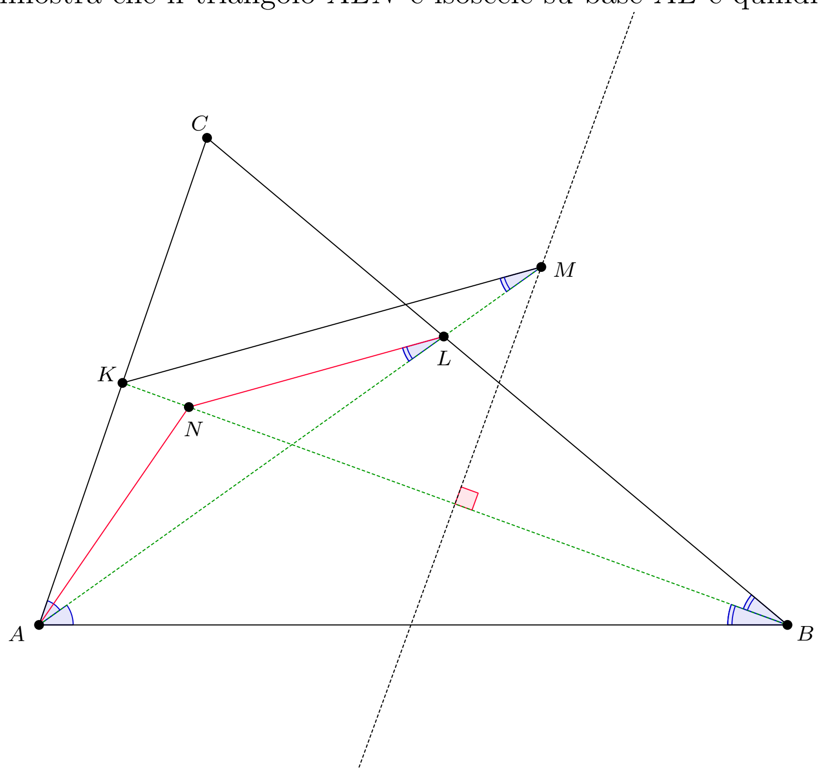
$$\angle ABK = \angle AMK = \angle ALN\,,$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato il parallelismo fra KM ed LN.

Perciò in particolare abbiamo ottenuto che $\angle ABN = \angle ALN$ e quindi anche il quadrilatero $ABLN$ è ciclico. Di conseguenza

$$\angle NAL = \angle NBL = \angle ABN = \angle ALN\,,$$

il che dimostra che il triangolo ALN è isoscele su base AL e quindi $LN = NA$.



(Testo)

Soluzione di N2: Innanzitutto notiamo che se $p = q$ banalmente non c'è soluzione, quindi supponiamo $p \neq q$. Studiando ora l'equazione modulo q, otteniamo

$$p^3 \equiv p^2 \pmod q \implies p \equiv 1 \pmod q\,.$$

Esiste quindi k intero non negativo tale che $p = kq + 1$. Sostituendo nel testo l'equazione diventa

$$(kq+1)^3 - q^5 = [(k+1)q+1]^2\,,$$

da cui, riducendo modulo q^2, otteniamo

$$\begin{aligned}(kq+1)^3 - q^5 \equiv [(k+1)q+1]^2 \pmod{q^2} &\iff 3kq+1 \equiv 2(k+1)q+1 \pmod{q^2}\\ \iff kq \equiv 2q \pmod{q^2} &\iff k \equiv 2 \pmod q\,.\end{aligned}$$

A questo punto distinguiamo due casi:

- Se $k = 2$, allora $p = 2q + 1$ e sostituendo nel testo abbiamo

  $$\begin{aligned}(2q+1)^3 - q^5 = (3q+1)^2 &\iff 8q^3 + 12q^2 + 6q + 1 - q^5 = 9q^2 + 6q + 1\\ 8q^3 + 3q^2 = q^5 &\iff q^3 = 8q + 3\end{aligned}$$

  Per $q \geq 4$ il lato sinistro dell'equazione è sempre maggiore del lato destro, quindi controlliamo gli altri 3 casi. Se $q = 1$, q non è primo, che contraddice le ipotesi del testo. Se $q = 2$, vale $q^3 = 8 \neq 19 = 8q + 1$, quindi l'equazione non è rispettata. Infine se $q = 3$ l'equazione è invece rispettata e $p = 7$, che è primo. Quindi ho ottenuto una soluzione, che verifico che rispetti effettivamente l'equazione iniziale

  $$p^3 - q^5 = 7^3 - 3^5 = 100 = (7+3)^2 = (p+q)^2\,.$$

- Se $k > q$, allora in particolare $p > q^2$, quindi ottengo

  $$p^3 = (p+q)^2 + q^5 < 4p^2 + q^5 \implies q^5 > p^2(p-4) > q^4(q^2-4) \implies q > q^2 - 4\,.$$

  Quest'ultima disuguaglianza però non è mai rispettata a meno che $q = 1, 2$. Nel primo caso q non è primo, nel secondo caso l'equazione si riduce a $p^3 = (p+2)^2+32$. Ancora una volta il lato a sinistra dell'equazione è strettamente maggiore del lato destro se $p \geq 4$. Per $p = 1, 2, 3$ si verifica facilmente che l'equazione non è rispettata poiché $32 > p^3$.

Nota. Abbiamo utilizzato varie volte nella soluzione, senza soffermarci sui dettagli, che dati due polinomi $r(x)$ ed $s(x)$ di grado $n > m$ rispettivamente, per x (intero nel nostro caso) abbastanza grande vale $r(x) > s(x)$. In particolare non abbiamo mostrato volta per volta che i casi piccoli a cui ci riducevamo erano gli unici possibili, cosa che però dovrebbe essere fatta e può essere fatta facilmente per induzione (si parte da un intero in cui vale la disuguaglianza e si dimostra che vale anche per quello successivo) o con un semplice studio di derivate della funzione.

(Testo)

Soluzione di A3: Innanzitutto ponendo $y = 0$, otteniamo facilmente che $f(0) = 0$.

Chiamiamo quindi $\alpha = f(1)$ e sostituiamo $(x, y) = (u, 1)$ nel testo, troviamo dunque

$$f(u) \leq \alpha u \,.$$

Sostituendo invece $(x, y) = (\frac{1}{u}, u)$ per $u > 0$, sempre nel testo, abbiamo

$$\alpha u \leq f(u) \,.$$

Unendo le due disuguaglianze abbiamo ovviamente che $f(u) = \alpha u$ per $u \geq 0$.

Analogamente, sostituendo nel testo prima $(x, y) = (u, -1)$ e poi $(x, y) = (\frac{1}{u}, -u)$ con $u > 0$, otteniamo rispettivamente

$$f(-u) \leq -\beta u \,, \qquad f(-u) \geq -\beta u \,,$$

dove $\beta = -f(-1)$. Perciò abbiamo che $f(u) = \beta u$ per $u \leq 0$.

Considero ora $x < 0$ e $y < 0$ nel testo e ottengo

$$\alpha xy = f(xy) \leq x f(y) = \beta xy \,,$$

perciò deve valere $\alpha \leq \beta$, poiché $xy > 0$.

Vediamo ora che, per ogni $\alpha \leq \beta$ reali, la funzione

$$\begin{cases} f(x) = \alpha x \,, & \text{se } x \geq 0 \\ f(x) = \beta x \,, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

rispetta la disuguaglianza iniziale. Per farlo distinguiamo vari casi a seconda del segno di x e y:

(i) se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, allora $f(xy) = \alpha xy = x f(y)$;

(ii) se $x \geq 0$ e $y < 0$, allora $f(xy) = \beta xy = x f(y)$;

(iii) se $x < 0$ e $y \geq 0$, allora $xy \leq 0$ e quindi $f(xy) = \beta xy \geq \alpha xy = x f(y)$;

(iv) se $x < 0$ e $y < 0$, allora $xy \geq 0$ e perciò $f(xy) = \alpha xy \geq \beta xy = x f(y)$.

Abbiamo perciò verificato che le funzioni trovate rispettano la disuguaglianza del testo e abbiamo perciò concluso la dimostrazione. (Testo)

Soluzione di C3: Chiamo *ammissibili* i percorsi fra due città che hanno al massimo due archi. Allora, per ipotesi, fra due città ci deve essere esattamente un percorso ammissibile.

Fissiamo una città a e chiamiamo $b_1, \ldots, b_k$ le città ad essa collegate. Per ipotesi sappiamo che $k < n-1$ e non esistono collegamenti fra b_i e b_j per $i \neq j$, altrimenti esisterebbero due percorsi ammissibili fra tali città.

Prendiamo ora una città c non ancora considerata. Notiamo che c non può essere collegata ad a (altrimenti farebbe già parte di $b_1, \ldots, b_k$) e deve essere collegata ad esattamente un b_i per qualche $i = 1, \ldots, k$. Infatti c è collegata ad almeno un b_i e se esistessero $i \neq j$ tali che c è collegata sia a b_i che a b_j, allora ci sarebbero due percorsi ammissibili che connettono b_i e b_j (cioè $b_i - a - b_j$ e $b_i - c - b_j$).

Chiamiamo ora C_i l'insieme delle città collegate a b_i diverse da a. Sicuramente non ci possono essere archi che connettono due città che appartengono allo stesso insieme C_i, altrimenti ci sarebbero due percorsi ammissibili fra di loro (cioè l'arco diretto e il percorso passante per b_i).

Consideriamo ora b_i e una città $u \in C_j$ con $i \neq j$ e $C_j \neq \emptyset$ (che esiste perché c'è almeno una città non collegata ad a). Abbiamo già osservato che non può esserci un collegamento diretto fra b_i e u. Perciò, affinché esista esattamente un percorso ammissibile fra b_i e u, C_i non deve essere vuoto e deve esistere esattamente un $v \in C_i$ tale che u e v sono collegati. Poiché tale relazione è simmetrica abbiamo ottenuto una mappa bigettiva tra gli elementi di C_i e C_j per ogni $i \neq j$, perciò in particolare $|C_1| = |C_2| = \ldots = |C_k| = h$. Voglio ora mostrare che $h = k - 1$.

Consideriamo una città $u \in C_1$, questa sarà collegata ad esattamente una città v_0 di C_2; inoltre per ogni altra città v di C_2 esisteranno $i = 3, \ldots, k$ e $w \in C_i$ tale che w è collegata sia a u che a v (dato che deve esistere un percorso ammissibile fra u e v). Si vede facilmente che per città di C_2 diverse, gli insiemi C_i tramite le quali sono collegate a u devono essere diversi (altrimenti si contraddirebbe l'unicità dei percorsi ammissibili). Perciò deve valere che $h \leq k - 1$.

D'altra parte per ogni $i = 3, \ldots, k$ esiste $w_i \in C_i$ collegato a $u \in C_1$ per quanto detto precedentemente e ognuno di questi w_i deve essere collegato ad un diverso elemento di C_2 e diverso anche da v_0 (che è collegato direttamente con u), perciò $k - 2 \leq h - 1$. Unendo questo alla disuguaglianza precedente otteniamo proprio $h = k - 1$, come voluto. Infatti a questo punto abbiamo che

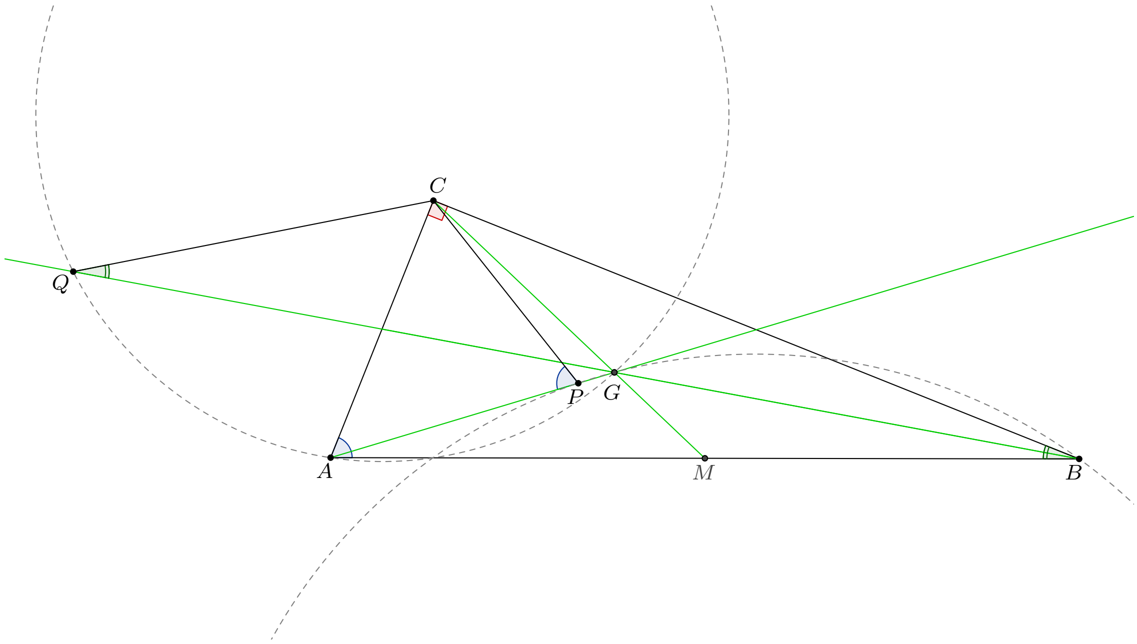
$$n - 1 = k + k(k-1) = k^2 ,$$

che conclude il problema. (Testo)

Soluzione di G3: Sia M il punto medio di AB, allora $AM = BM = CM$ poiché ABC è un triangolo rettangolo. Di conseguenza abbiamo che

$$\angle CPA = \angle BAC = \angle ACG\,.$$

Otteniamo perciò che AC è tangente in C alla circonferenza circoscritta a CPG.



Chiamiamo ora P' il punto di intersezione fra AB e la circonferenza circoscritta a BPG. Calcolando le potenze delle circonferenze circoscritte a CPG e $BPGP'$ dal punto A, abbiamo che

$$AP' \cdot AB = AP \cdot AG = AC^2 \implies AP' = \frac{AC^2}{AB}\,.$$

Chiamato Q' il punto di intersezione fra AB e la circonferenza circoscritta a AQG, facendo ragionamenti del tutto analoghi ai precedenti (la configurazione è simmetrica), otteniamo

$$BQ' = \frac{BC^2}{AB}\,.$$

Di consequenza

$$AP' + BQ' = \frac{AC^2}{AB} + \frac{BC^2}{AB} = \frac{AB^2}{AB} = AB\,,$$

perciò P' e Q' devo necessariamente coincidere, il che conclude il problema.

Nota. Notare che il punto di intersezione trovato coincide con il piede dell'altezza da A.

(Testo)

Soluzione di N3: I possibili residui quadratici modulo 5 sono 0, 1 e 4, mentre invece abbiamo che

$$3^{4k+1} \equiv 3\,, \quad 3^{4k+2} \equiv 4\,, \quad 3^{4k+3} \equiv 2\,, \quad 3^{4k} \equiv 1 \pmod 5\,.$$

Perciò, studiando l'equazione modulo 5, otteniamo che x deve essere necessariamente pari, poiché deve valere $3^x \equiv z^2 \pmod 5$. Chiamiamo quindi $x = 2k$, con k intero positivo.

Ci siamo quindi ricondotti a trovare k, y, z interi positivi tali che

$$3^{2k} - 5^y = z^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 5^y = 3^{2k} - z^2 = (3^k - z)(3^k + z)\,.$$

È facile verificare che $3^k - z$ e $3^k + z$ non possono essere entrambi divisibili per 5, quindi l'unica possibilità è che

$$\begin{cases} 3^k - z = 1 \\ 3^k + z = 5^y \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 2 \cdot 3^k = 5^y + 1\,.$$

Se $k = 1$, otteniamo la soluzione $2 \cdot 3 = 5 + 1$, che corrisponde a $(x, y, z) = (2, 1, 2)$. Supponiamo quindi che k sia maggiore o uguale a 2, perciò modulo 9 deve valere

$$5^y + 1 \equiv 0 \pmod 9\,.$$

Abbiamo però che

$$5^{6h+1} \equiv 5\,, \quad 5^{6h+2} \equiv 7\,, \quad 5^{6h+3} \equiv 8\,, \quad 5^{6h+4} \equiv 4\,, \quad 5^{6h+5} \equiv 2\,, \quad 5^{6h} \equiv 1 \pmod 9\,,$$

perciò otteniamo che $y \equiv 3 \pmod 6$. D'altra parte modulo 7, abbiamo dunque che

$$5^y + 1 = 5^{6h+3} + 1 \equiv 0 \pmod 7\,,$$

che quindi dà un assurdo, perché 7 non divide $2 \cdot 3^k$.

Nota. Arrivati all'equazione $2 \cdot 3^k = 5^y + 1$ si può concludere facilmente con il lemma LTE (Lifting The Exponent), che risulta utile in molte equazioni diofantee.

(Testo)

Soluzione di A4: Notiamo che $p(x) = x^n$ rispetta facilmente l'equazione del testo per ogni $n \in \mathbb{N}$, infatti $p(x) \cdot p(x^2) = x^n \cdot x^{2n} = x^{3n} = p(x^3)$. Vogliamo mostrare che questi, insieme al polinomio nullo, sono tutti e soli i polinomi che stiamo cercando.

Supponiamo quindi che $p(x)$ non sia della forma x^n per qualche $n \in \mathbb{N}$ e rispetti l'equazione del testo

$$p(x) \cdot p(x^2) = p(x^3)\,. \tag{7.1}$$

Scriviamo $p(x) = ax^n + q(x)$, dove n è il grado del polinomio $p(x)$ e $q(x)$ è un polinomio di grado strettamente minore (quindi $a \neq 0$). Allora, confrontando i coefficienti di grado maggiore nella Equazione (7.1) (cioè quelli corrispondenti a x^{3n}), otteniamo che deve valere $a^2 = a$. Perciò abbiamo che $a = 1$, visto che a non può essere 0.

Perciò possiamo scrivere $p(x) = x^n + bx^m + r(x)$, dove $b \neq 0$ e $n > m > \deg r$, infatti per ipotesi $p(x)$ non può avere solo il termine di x^n. Riscrivendo l'Equazione (7.1) abbiamo che

$$(x^n + bx^m + r(x))(x^{2n} + bx^{2m} + r(x^2)) = x^{3n} + bx^{3m} + r(x^3)$$

$$\iff bx^{2n+m} + bx^{n+2m} + b^2x^{3m} + r_1(x) = bx^{3m} + r(x^3)\,,$$

dove $r_1(x)$ è un polinomio di grado strettamente minore di $3m$. Si vede però facilmente che questa equazione non può essere rispettata se $b \neq 0$, poiché il grado del polinomio a sinistra è strettamente maggiore del grado del polinomio a destra, dato che $2n+m > 3m$. (Testo)

Soluzione di C4: Vogliamo mostrare che vince sempre Giada. Infatti alla prima mossa Giada sceglie di togliere una moneta da ciascuna delle pile composte da 1, 2^{n-4}, 2^{n-3}, 2^{n-2} e 2^{n-1} monete (cioè la prima pila e le ultime quattro). Ai turni successivi sottrae una moneta alle stesse pile a cui Federico ha sottratto una moneta nella mossa precedente. Mostriamo che Giada potrà sempre effettuare tale mossa (cioè Federico non toglierà mai l'ultima moneta da una pila durante una sua mossa).

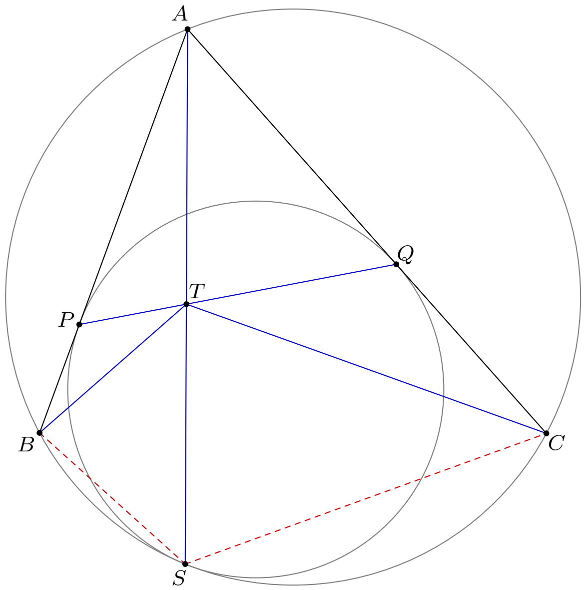
Notiamo che durante il gioco le ultime quattro pile non vengono azzerate, infatti ad ogni mossa viene tolta almeno una moneta dalle prime $n-4$ pile e vale che $2^{n-4} > 2^{n-4}-1 = 1+2+2^2+\ldots+2^{n-5}$. Perciò non è possibile azzerare durante il gioco una delle ultime quattro pile.

Perciò è ora immediato che Giada potrà sempre imitare le mosse di Federico, poiché quest'ultimo le lascerà sempre pile con un numero dispari di monete fra le prime $n-4$ e le ultime quattro pile non potranno mai rimanere vuote. (Testo)

Soluzione di G4: Dimostreremo che i triangoli BTP e CTQ sono simili, da cui discende direttamente la tesi.

Innanzitutto, ricordiamo il seguente lemma, che si può trovare nella Sessione 6 degli Allenamenti EGMO 2016:

Lemma. *Sia Γ una circonferenza e sia ω una circonferenza tangente internamente a Γ in S. Una tangente a ω da un punto R su Γ tange ω in T. Allora il rapporto RS/RT è costante al variare di R su Γ.*



Passiamo ora alla dimostrazione del problema. Notiamo che $\angle BPT = \angle CQT$, quindi avremmo concluso se mostrassimo che $BP/CQ = PT/QT$. D'altra parte, utilizzando il lemma enunciato, otteniamo direttamente che

$$\frac{BP}{BS} = \frac{CQ}{CS} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{BP}{CQ} = \frac{BS}{CS},$$

perciò ci rimane solo da mostrare che $BS/CS = PT/QT$.

Utilizzando il teorema dei seni sui triangoli PAT e QAT, otteniamo

$$\frac{PT}{QT} = \frac{PA \cdot \sin(\angle PAT)}{\sin(\angle PTA)} \cdot \frac{\sin(\angle QTA)}{AQ \cdot \sin(\angle QAT)} = \frac{\sin(\angle PAT)}{\sin(\angle QAT)}.$$

Inoltre, per il teorema dei seni questa volta sui triangoli ABS e ACS, abbiamo invece

$$\frac{BS}{CS} = \frac{AB \cdot \sin(\angle BAS)}{\sin(\angle BSA)} \cdot \frac{\sin(\angle CSA)}{AC \cdot \sin(\angle CAS)} = \frac{AB \cdot \sin\beta}{AC \cdot \sin\gamma} \cdot \frac{\sin(\angle BAS)}{\sin(\angle CAS)} =$$
$$= \frac{\sin(\angle BAS)}{\sin(\angle CAS)} = \frac{\sin(\angle PAT)}{\sin(\angle QAT)},$$

perciò abbiamo ottenuto $BS/CS = PT/QT$, che era quello che cercavamo. (Testo)

Soluzione di N4: Innanzitutto osserviamo che, se a_1 è divisibile per 5, allora a_n è divisibile per 5 per ogni $n \in \mathbb{N}$ e perciò non potrà mai essere una potenza di 2. Quindi ci rimane solo da mostrare che se a_1 non è divisibile per 5, allora esistono infiniti $n \in \mathbb{N}$ tali che a_n è una potenza di 2.

Per ipotesi b_n è la cifra delle unità di a_n, quindi

$$b_{n+1} = \ a_{n+1} \pmod{10} = \ a_n + b_n \pmod{10} = \ 2b_n \pmod{10}\,.$$

Se a_1 non è divisibile per 5, allora $b_1 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, perciò $b_2 \in \{2, 4, 6, 8\}$. Inoltre una volta che b_n assume uno dei valori $2, 4, 6, 8$, la successione dei b_n diventa periodica ripetendo nell'ordine $2, 4, 8, 6$.

Perciò è facile vedere che esiste $r_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale

$$a_{r_0+4k+i} = a_{r_0} + 20k + \delta_i\,,$$

dove $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 6$, $\delta_3 = 14$. Notiamo in particolare che a_{r_0} è un numero pari.

Calcolando le potenze di 2 modulo 20, otteniamo che per $s \geq 1$ vale

$$2^{4s} \equiv 16\,, \quad 2^{4s+1} \equiv 12\,, \quad 2^{4s+2} \equiv 4\,, \quad 2^{4s+3} \equiv 8 \pmod{20}\,.$$

Quindi per concludere è sufficiente far vedere che esiste $i = 0, 1, 2, 3$ tale che $a_{r_0} + \delta_i \pmod{20} \in \{4, 8, 12, 16\}$, dove a_{r_0} può assumere qualsiasi valore pari modulo 20. Questa è una semplice verifica (da fare esplicitamente!) che conclude il problema. (Testo)

Soluzione di A5: Riscriviamo la tesi sviluppando i prodotti, abbiamo quindi che

$$(1+x^3)(1+y^3)(1+z^3) \geq (1+xyz)^3$$
$$\iff x^3+y^3+z^3+x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3 \geq 3xyz+3x^2y^2z^2$$

D'altra parte per la disuguaglianza $AM \geq GM$ sulle terne (x^3, y^3, z^3) e (x^3y^3, y^3z^3, z^3x^3) otteniamo rispettivamente che

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^3y^3z^3}\,, \qquad \frac{x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^6y^6z^6} = x^2y^2z^2\,,$$

che sommate danno proprio la disuguaglianza cercata.

Nota. Le due disuguaglianze che abbiamo mostrato con $AM \geq GM$ sono un'ovvia conseguenza della disuguaglianza di *bunching*. Inoltre è possibile generalizzare questa disuguaglianza a più variabili. Infatti dati $x_1, \ldots, x_n$ reali positivi, vale

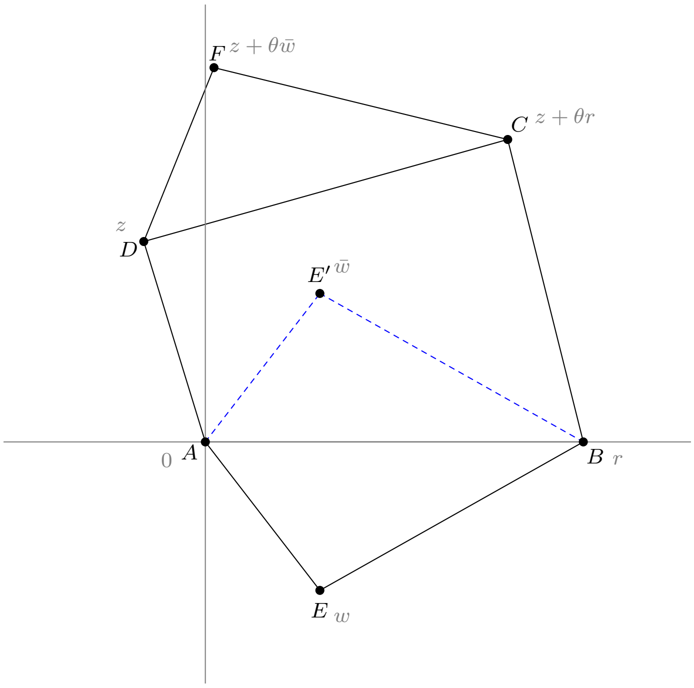
$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k^n) \geq \left(1+\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^n .$$

(Testo)

Soluzione di C5: Vogliamo dimostrare che vince sempre Anna. Supponiamo per assurdo che ciò non sia vero e quindi che per un certo rettangolo $n \times m$ Bob abbia una strategia vincente a prescindere dalla prima mossa di Anna.

In particolare supponiamo che Anna come prima mossa elimini la casella in alto a sinistra. A questo punto Bob con la sua mossa restituisce ad Anna una configurazione perdente, ma ciò è assurdo. Infatti in tal caso Anna avrebbe potuto fare la mossa di Bob come prima mossa. (Testo)

Soluzione di G5: Risolviamo il problema utilizzando dei conti con i numeri complessi.



Poniamo l'origine nel punto A e supponiamo senza perdità di generalità che B sia sull'asse reale positivo con coordinata r. Inoltre chiamiamo w la coordinata complessa di E e z la coordinata complessa di D.

Il simmetrico E' di E rispetto all'asse reale ha coordinata $\bar{w}$, il complesso coniugato di w. Allora C ed F hanno rispettivamente coordinate $z+\theta r$ e $z+\theta\bar{w}$, con θ un numero complesso di modulo 1. Infatti il triangolo DCF è ottenuto dal triangolo ABE' tramite una rotazione di un certo angolo (rappresentata dalla moltiplicazione per un numero complesso θ) e da una traslazione rispetto al vettore $\overrightarrow{AD}=z$.

Perciò i punti medi di AD, BC ed EF hanno coordinate rispettivamente

$$\frac{z}{2}, \quad \frac{z}{2}+(1+\theta)r, \quad \frac{z}{2}+\frac{w+\theta\bar{w}}{2}.$$

Vogliamo mostrare che questi tre punti sono allineati. Perciò, a meno di traslare di $-\frac{z}{2}$, è sufficiente mostrare che $(1+\theta)r$ e $\frac{w+\theta\bar{w}}{2}$ sono sulla stessa retta passante per l'origine, cioè il loro rapporto è un numero reale. Verifichiamo quindi che tale rapporto è effettivamente reale [1]

$$\frac{(w+\theta\bar{w})/2}{(1+\theta)r}=\frac{1}{2r}\cdot\frac{w+\theta\bar{w}}{1+\theta}=\frac{1}{2r}\cdot\frac{(w+\theta\bar{w})(1+\bar{\theta})}{(1+\theta)(1+\bar{\theta})}=\frac{1}{2r}\cdot\frac{w+w\bar{\theta}+\theta\bar{w}+\bar{w}}{(1+\theta)(1+\bar{\theta})}=$$
$$=\frac{1}{r|1+\theta|^2}\left(\frac{w+\bar{w}}{2}+\frac{w\bar{\theta}+\bar{w}\theta}{2}\right)=\frac{\Re(w)+\Re(w\bar{\theta})}{r|1+\theta|^2}\in\mathbb{R}.$$

(Testo)

[1]Ricordiamo che $\Re(w)$ denota la parte reale di w ed è facilmente uguale a $\frac{w+\bar{w}}{2}$.

Soluzione di N5: Vogliamo mostrare che l'intero positivo cercato è $a = 9$, che effettivamente rispetta l'equazione con $p = 2$ e $b = 6$.

Prendiamo a, p, b che rispettano l'equazione. Se $p = 2$, allora deve valere

$$\frac{a(a-1)}{2} = b^2$$

e il più piccolo a che rispetta quest'equazione per qualche b è effettivamente $a = 9$ (in gara bisogna controllare a mano esplicitamente!).

Supponiamo quindi $p \neq 2$ e distinguiamo due casi:

- se p divide a, allora abbiamo

$$\frac{a}{p} \cdot (a^{p-1} - 1) = b^2 \,,$$

  però a/p e $a^{p-1} - 1$ sono coprimi, quindi devono essere entrambi quadrati. Però $a^{p-1} - 1$ non può essere un quadrato tranne per $a = 2$ e $p = 2$, perché a^{p-1} è esso stesso un quadrato (p è dispari) e due quadrati non possono distare 1 a meno del caso citato. D'altra parte avevamo già escluso il caso $p = 2$, quindi in questo caso non troviamo soluzioni dell'equazione.

- se p non divide a, allora deve dividere $a^{p-1} - 1$ e deve valere

$$a \cdot \frac{a^{p-1} - 1}{p} = b^2 \,.$$

  Analogamente a prima a e $(a^{p-1} - 1)/p$ sono coprimi, quindi a deve essere un quadrato. L'unico caso ancora da escludere è $a = 4$, poiché il quadrato successivo è 9, per cui abbiamo già trovato una soluzione. In tal caso dovremmo avere che $(4^{p-1} - 1)/p$ è un quadrato perfetto. Abbiamo però che

$$\frac{4^{p-1} - 1}{p} = \frac{2^{p-1} - 1}{p} \cdot (2^{p-1} + 1) \,.$$

  Però anche qui abbiamo che $(2^{p-1} - 1)/p$ e $2^{p-1} + 1$ sono interi coprimi e quindi dovrebbero essere entrambi quadrati, che è assurdo similmente a prima poiché $2^{p-1} + 1$ dista 1 dal quadrato 2^{p-1}.

(Testo)