

Allenamenti EGMO 2017 – 5

Esercizio 1. Dati x, y, z reali positivi, mostrare che

$$(1 + x^3)(1 + y^3)(1 + z^3) \geq (1 + xyz)^3.$$

Esercizio 2. Anna e Bob hanno davanti un rettangolo di $n \times m$ caselle e giocano al seguente gioco: a turno selezionano una casella e la eliminano, eliminando così anche tutte le caselle che si trovano in alto a sinistra di questa (cioè vengono eliminate tutte le caselle ancora presenti nel rettangolo che ha come vertice in basso a destra la casella scelta). Chi sceglie la casella in basso a destra perde. Inizia Anna. Chi vince?

Esercizio 3. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso con $AB = CD$. Siano ABE e CDF due triangoli esterni ad $ABCD$ tali che $\angle ABE = \angle DCF$ e $\angle BAE = \angle CDF$. Dimostrare che i punti medi di AD , BC ed EF sono allineati.

Esercizio 4. Determinare il più piccolo intero positivo $a \geq 2$ per il quale esistono un primo p e un intero positivo $b \geq 2$ tali che

$$\frac{a^p - a}{p} = b^2.$$