

## Allenamenti EGMO 2017 – 5

**Esercizio 1.** Dati  $x, y, z$  reali positivi, mostrare che

$$(1 + x^3)(1 + y^3)(1 + z^3) \geq (1 + xyz)^3.$$

**Esercizio 2.** Anna e Bob hanno davanti un rettangolo di  $n \times m$  caselle e giocano al seguente gioco: a turno selezionano una casella e la eliminano, eliminando così anche tutte le caselle che si trovano in alto a sinistra di questa (cioè vengono eliminate tutte le caselle ancora presenti nel rettangolo che ha come vertice in basso a destra la casella scelta). Chi sceglie la casella in basso a destra perde. Inizia Anna. Chi vince?

**Esercizio 3.** Sia  $ABCD$  un quadrilatero convesso con  $AB = CD$ . Siano  $ABE$  e  $CDF$  due triangoli esterni ad  $ABCD$  tali che  $\angle ABE = \angle DCF$  e  $\angle BAE = \angle CDF$ . Dimostrare che i punti medi di  $AD$ ,  $BC$  ed  $EF$  sono allineati.

**Esercizio 4.** Determinare il più piccolo intero positivo  $a \geq 2$  per il quale esistono un primo  $p$  e un intero positivo  $b \geq 2$  tali che

$$\frac{a^p - a}{p} = b^2.$$