

Allenamenti EGMO 2016 – 3

Esercizio 1. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f(xy) \leq xf(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Ci sono n città in uno stato. Alcune di esse sono collegate da voli nazionali. Ogni volo connette esattamente due città e se c'è un volo da A a B c'è un volo anche da B ad A . È noto che per ogni coppia di città c'è un unico tragitto per raggiungere la seconda dalla prima usando al massimo due voli. Nessuna città è collegata a tutte le altre con voli diretti.

Dimostrare che $n - 1$ è un quadrato di un intero.

Esercizio 3. Sia ABC un triangolo rettangolo in C e sia G il suo baricentro. Sia P il punto sulla retta AG tale che $\angle CPA = \angle CAB$, e sia Q il punto sulla retta BG tale che $\angle CQB = \angle ABC$. Dimostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli AQG e BPG si intersecano sul lato AB .

Esercizio 4. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $3^x - 5^y = z^2$, con x, y, z interi positivi.