

## Allenamenti EGMO 2016 – 3

**Esercizio 1.** Trovare tutte le funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f(xy) \leq xf(y)$  per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 2.** Ci sono  $n$  città in uno stato. Alcune di esse sono collegate da voli nazionali. Ogni volo connette esattamente due città e se c'è un volo da  $A$  a  $B$  c'è un volo anche da  $B$  ad  $A$ . È noto che per ogni coppia di città c'è un unico tragitto per raggiungere la seconda dalla prima usando al massimo due voli. Nessuna città è collegata a tutte le altre con voli diretti.

Dimostrare che  $n - 1$  è un quadrato di un intero.

**Esercizio 3.** Sia  $ABC$  un triangolo rettangolo in  $C$  e sia  $G$  il suo baricentro. Sia  $P$  il punto sulla retta  $AG$  tale che  $\angle CPA = \angle CAB$ , e sia  $Q$  il punto sulla retta  $BG$  tale che  $\angle CQB = \angle ABC$ . Dimostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli  $AQG$  e  $BPG$  si intersecano sul lato  $AB$ .

**Esercizio 4.** Trovare tutte le soluzioni dell'equazione  $3^x - 5^y = z^2$ , con  $x, y, z$  interi positivi.