OLIFORUM CONTEST

5TH EDITION

Problema 1. Sapendo che esiste un intero positivo che ha 7 cifre diverse ed è multiplo di ognuna di esse, quali sono le sue cifre?

(proposto da Paolo Leonetti)

Problema 2. Quali sono i quadrilateri che possono essere tassellati (cioè ricoperti, senza sovrapposizioni) con quadrati e triangoli equilateri di lato unitario?

(proposto da Emanuele Tron)

Problema 3. Esistono primi $p_1, \ldots, p_k$ e $q_1, \ldots, q_n$ non necessariamente distinti tali che

$$p_1! \cdots p_k! \cdot 2017 = q_1! \cdots q_n! \cdot 2016 \quad ?$$

(proposto da Paolo Leonetti)

Problema 4. Sia p_n l'n-esimo primo (cioè $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ...) e definiamo

$$X_n = \{0\} \cup \{p_1, \ldots, p_n\}$$

per ogni intero positivo n. Trovare tutti gli n tali che esistono $A, B \subseteq \mathbf{N}$ per cui $|A|, |B| \geq 2$ e

$$X_n = A + B,$$

dove $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ e $\mathbf{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$.

(proposto da Salvatore Tringali)

Problema 5. Determinare il più piccolo intero $n > 3$ tale che, qualunque sia la partizione di $\{3, 4, \ldots, n\}$ in due insiemi, allora almeno uno dei due insiemi contiene tre numeri a, b, c (non necessariamente distinti) tali che $ab = c$.

(proposto da Alberto Alfarano)

Problema 6. Siano reali $x, y, z > 0$ tali che $x + y + z = \sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y} + \sqrt[5]{z}$. Mostrare che $x^x y^y z^z \geq 1$.

(proposto da Paolo Leonetti)

Problema 7. Dati $2n$ reali distinti $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$, definiamo la matrice $n \times n$ dove l'elemento nella posizione (i, j) è $x_i + y_j$ per ogni $i, j = 1, \ldots, n$. Dimostrare che se il prodotto dei numeri in ogni colonna è lo stesso, allora il prodotto dei numeri in ogni riga è lo stesso.

(proposto da Alberto Alfarano)

Problema 8. Dati $a_1, \ldots, a_n \in (0,1)$, definiamo

$$f(I) = \prod_{i \in I} a_i \cdot \prod_{j \notin I} (1 - a_j)$$

per ogni $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Sapendo che

$$\sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I| \text{ dispari}}} f(I) = \frac{1}{2},$$

mostrare che almeno un a_i deve essere $\frac{1}{2}$.

(proposto da Paolo Leonetti)

Problema 9. Dato un triangolo ABC, sia P il punto che minimizza la somma dei quadrati delle distanze dai lati del triangolo. Siano D, E, F le proiezioni di P sui lati del triangolo ABC. Mostrare che P è il baricentro di DEF.

(proposto da Jack D'Aurizio)

Problema 10. Sia $(x_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ due successioni di interi tali che $|x_{n+2} - x_n| \leq 2$ e $x_n + x_m = y_{n^2+m^2}$ per ogni $n, m \in \mathbf{Z}$. Dimostrare che la successione degli x_n prende al massimo 6 valori distinti.

(proposto da Paolo Leonetti)

Problema 11. Sia p un primo sufficientemente grande. Mostrare che il numero di residui distinti presi dall'insieme

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots, p-1\right\}$$

modulo p è maggiore di $\sqrt[4]{p}$.

(proposto da Carlo Sanna)