Domande orali per l'ammissione SNS 2016-2017

Classe di Scienze, I anno

30 dicembre 2016

Introduzione e consigli

Questo documento raccoglie 103 domande fatte alle prove orali per l'ammissione alla Classe di Scienze di quest'anno. Per evitare ripetizioni, domande troppo simili sono state accorpate in una sola. In particolare, all'esame di fisica i professori possono fare domande diverse riguardo lo stesso problema a persone diverse.
Per la preparazione alla prova orale, è consigliabile guardarsi anche gli scritti degli anni precedenti. Spesso infatti i vecchi problemi vengono, almeno in parte, riproposti. Alla prova di fisica i professori tendono a chiedere chiarimenti riguardo la prova scritta, e in alcuni casi possono anche chiedere di rifare alcuni problemi non risolti.
Durante la prova, l'importante è cercare di rimanere il più rilassati possibile. I professori vogliono vedere come ragiona il candidato, non quanto ha studiato: se un problema sembra molto difficile, è comunque utile ragionare come si farebbe allo scritto, ma a voce alta.
Buon lavoro!

Elenco Domande

1 Domande per matematici, fisici e informatici

1.1 Matematica

1. Trova le formule della proiezione stereografica: dato un punto $P(x, y, z)$ sulla sfera di raggio 1 centrata dell'origine, trova le coordinate del punto che è la proiezione da $(0, 0, 1)$ di P sul piano $z = 0$.

2. (Scritti 2012.4) Data una funzione $f(x, y)$ tale che fissato x è un polinomio in y di grado $\leq n$ e fissato y è un polinomio in x di grado $\leq n$, dimostra che $f(x, y)$ è un polinomio in x, y.

3. Dato un tavolo da biliardo quadrato e due punti distinti P e Q al suo interno, considera tutte le spezzate che sono possibili traiettorie di una palla che parta da P e arrivi in Q. Considera l'insieme dei punti medi di tutte le spezzate: da quanti punti è costituito?

4. Dimostrare che qualsiasi poligono può essere triangolato, ovvero che può essere scomposto in una serie di triangoli giacenti completamente all'interno della regione di piano delimitata dalla spezzata poligonale, ognuno con almeno un lato in comune con un altro triangolo o giacente sulla spezzata di partenza.

5. Sia $f : [0; 1] \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una funzione continua e integrabile, tale che $f(x) \leq \int_0^x f(y)dy \ \forall x \in [0; 1]$. Caratterizzare f.

6. Determinare $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$.

7. Dimostrazione di Euclide dell'infinità dei numeri primi. Dimostrare che esistono infiniti primi della forma $4k + 3$.

8. Sia $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua, non negativa e tale che $f\left(\frac{x}{2}\right) \leq f(x)$. Trovare, se esiste, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. Ripetere nel caso $f : (0, 1] \mapsto \mathbb{R}$.

9. Dimostrare la disuguaglianza di riarrangiamento.

10. Dimostrare che per ogni intero positivo n vale $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq \frac{3}{4}$.

11. Date tre rette parallele nel piano, è sempre possibile costruire un triangolo equilatero tale che ciascun vertice appartenga ad una delle tre rette e che vertici distinti appartengano a rette distinte? (In particolare, oltre a eventuali soluzioni differenti, si cerchi una dimostrazione che faccia uso di una rotazione del piano).

12. Dati n punti neri e n punti rossi a tre a tre non allineati, dimostrare che si possono tracciare n segmenti tali che: i) ogni segmento ha estremi colori diversi; ii) nessuna coppia di segmenti si interseca.

13. Sia ABC un triangolo e si costruiscano, esternamente a esso, i triangoli equilateri sui tre lati. Dimostrare che le circoscritte ai tre triangoli equilateri concorrono. Si sostituiscano ora i tre triangoli equilateri con tre poligoni regolari, rispettivamente di a, b e c lati. Per quali valori di a, b e c le circoscritte concorrono?

14. Trovare un polinomio a coefficienti interi che abbia come radice $1+\sqrt{2}$. Trovare un secondo polinomio, sempre a coefficienti interi, che abbia come radice $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

15. Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Trovare tutte le funzioni per cui vale $f(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

16. Trovare il minimo numero di cerchi di raggio 1 da utilizzare per ricoprire interamente un'ellisse di semiassi 1 e 2.

17. Si consideri una n-upla di numeri reali tutti non nulli, cosa si può dire se $\sum_{i=1}^{n} x_i^k = 0$ per ogni k dispari?

18. Descrivere tutte le possibili isometrie associando a ogni punto del piano un numero complesso e scrivendole come operazioni elementari sui numeri complessi.

19. Si consideri una piramide a base quadrata di lato 1 i cui lati sono costituiti da sbarrette di acciaio non deformabili. È possibile avvicinare due punti meccanicamente sui lati della piramide? E se viene sostituita con un ottaedro?

20. Data $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ continua e tale che $f(0) = (0,0,0)$ e $f(1) = (2,0,0)$, dimostra che interseca la sfera di raggio unitario e centro nell'origine.

21. Si considerino due punti su una semiretta collegati da due fili di ferro complanari (dunque deformati, ma rigidi) a un terzo punto. Dire come muovere i due punti sulla semiretta (e di conseguenza il terzo punto) per massimizzare l'area compresa fra la semiretta e i due fili di ferro. Dimostrare dunque che avendo uno spago (dunque deformabile) e due punti vincolati su una semiretta, la figura di area massima è una semicirconferenza.

22. Si consideri la successione:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \\ x_0 = 2 \end{cases} \tag{1}$$

Considerando noto $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$ e dato $d_n = |x_n - x_{n-1}|$, dimostrare che $d_{n+1} < \frac{1}{2}d_n^2$. Quante cifre significative in più ottengo ad ogni iterazione?

23. Trovare il numero di funzioni suriettive da un insieme di cardinalità m a un insieme di cardinalità n.

24. Sia $n \geq 1$ e si consideri una n-upla di reali distinti e la funzione $f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x-x_j}$. Qual è il suo grafico? Dimostrare che ha esattamente $n-1$ zeri.

25. Dimostra che $\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}$ è razionale se e solo se a è un quadrato perfetto e b è un cubo perfetto.

26. Sia F_n l'n-esimo numero di Fibonacci. Dimostrare allora che $F_{m+n} = F_m F_{n-1} + F_n F_{m+1}$.

27. Dati $2n$ punti nel piano, dimostrare che esiste sempre un cerchio che ne contiene esattamente n.

28. Data la funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$. Cosa si può dire di f?

29. Sia F_n l'n-esimo numero di Fibonacci. Dimostrare che la somma dei primi n numeri di Fibonacci è uguale a $F_{n+2} - 1$.

30. Si consideri una trasformazione dal piano nel piano che trasforma il punto P di coordinate (x, y) nel punto P' di coordinate $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+^2}\right)$. Dire in cosa viene trasformata una retta qualunque e una circonferenza passante per l'origine. La trasformazione conserva gli angoli? Sapresti esprimere questa trasformazione attraverso una funzione $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$?

31. Esistono funzioni di periodo arbitrariamente piccolo diverse dalla funzione costante?

32. Considera tutti i punti del piano colorati di rosso o blu. Dimostra che esiste un triangolo equilatero con i vertici dello stesso colore.

33. Considerare una sequenza S fatta come segue: ...0 0 2 5 4 3 0 0... e generare una successione di tali sequenze costruendo la successiva facendo la media fra due numeri in posizioni n e n+2 e collocare il risultato come elemento n+1 della nuova sequenza (nell'esempio si ottiene: ...0 0 1 2,5 3 4 2 1,5 0 0..). Dimostrare che: i) esiste un invariante; ii) i termini della sequenza sono non crescenti; iii) il massimo non può restare costante per sempre. Dimostrare inoltre che all'infinito la sequenza conterrà tutti 0.

34. Dimostrare la formula del cambiamento di base dei logaritmi.

35. Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{Q}$ continua e definita nell'intervallo $[a; b]$. Trovare tutte le funzioni f.

36. Trovare una figura sul piano invariante rispetto a una traslazione fissata, ma che non goda di altre simmetrie.

37. Data una funzione $f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, dire se è sempre possibile trovare due funzioni h e g da $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tali che

$$f(a, b, c) = g(h(a, b), c)$$

per ogni terna di naturali a, b, c. In particolare, dimostrare che esistono funzioni iniettive da $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ e da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

38. Dato un trapezio con basi AB e CD, le diagonali AC e BD si intersecano in P. Date le aree dei triangoli $\triangle ABP, \triangle CDP$, quali valori può assumere l'area del trapezio $ABCD$?

39. È possibile tassellare lo spazio con tetraedri regolari? (hint: pensa a cosa succede su uno spigolo).

40. Conosci un po' di analisi? Dato un $p(x)$ polinomio a coefficienti reali, calcola l'integrale $\int_0^{2\pi} p(cos(x))\mathrm{d}x$.

41. Dimostra che il prodotto di n interi positivi consecutivi è sempre multiplo di $n!$. Si svolga la dimostrazione anche per via combinatorica.

42. Determina il massimo d tale che $10^d \mid 1000!$.

43. Sai cosa sia un integrale? Dai una definizione formale di integrale definito. Ricava la formula per la lunghezza di un tratto di curva. Ricava la formula per la superficie di un solido di rotazione (intorno all'asse x). Ricava la formula per il volume di un solido di rotazione. [E altre domande del genere su casi particolari.]

44. Esiste un polinomio in due variabili $p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ iniettivo? Ed uno $q : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}$ sempre iniettivo? (si intende anche che ogni coppia dell'insieme di partenza ha immagine in quello di arrivo).

45. Siano a e b due interi. Trovare un polinomio monico a coefficienti interi con radice $a + \sqrt{b}$. Stessa cosa con $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Ancora con $\sqrt[3]{a} + \sqrt{b}$. Ed infine $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$.

46. Dimostra le seguenti

$$\sum_{k=1}^{7} \cos\left(\frac{2\pi k}{7}\right) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{7} \sin\left(\frac{2\pi k}{7}\right) = 0$$

47. Fissato n intero positivo, trova i $k \in \mathbb{N}$ tali che $\binom{n}{k}$ è massimo. Riesci a dare un'interpretazione intuitiva di questo fatto? (volevano qualcosa sull'entropia di un gas con due tipi di molecole). Conosci l'approssimazione di Stirling per il fattoriale? Usala per approssimare $\binom{2n}{n}$.

48. Due città distano $100km$; si vuole andare dalla prima alla seconda in treno, viaggiando senza biglietto. Si assuma che la probabilità di essere scoperti dal controllore mentre si percorre un tratto di d chilometri sia $p = d/100$, e si consideri che è possibile scendere dal treno in qualsiasi momento, prendendo il treno successivo senza alcun tempo di attesa. Trovare la miglior strategia e determinare la probabilità massima di completare il tragitto senza essere beccati.

49. Interpolazione polinomiale. Dati n punti nel piano cartesiano, a due a due non allineati verticalmente, scrivere una formula generale che permetta di trovare un polinomio passante per quei punti.

50. Geometria sferica. Dato un triangolo sferico con angoli α, β, γ si determini la sua area in funzione del raggio della sfera.(Hint: *fare un bel disegno*)

51. Sia f: $[0; 1] \to [0; 1]$ una funzione tale che

$$f(x) \leq 2 \int_0^x f(t)dt$$

si dimostri che $f(x) = 0 \quad \forall x \in [0; 1]$ ($f(x)$ identicamente nulla nel dominio) (Hint: *considera l'interpretazione grafica della funzione integrale*)

52. Consideriamo il triangolo di Tartaglia in cui ogni numero viene considerato modulo 2. Caratterizzare le righe formate da tutti 1 e quelle formate da tutti 0 tranne il primo e l'ultimo elemento, e dimostrare effettivamente che sono le uniche con tale proprietà

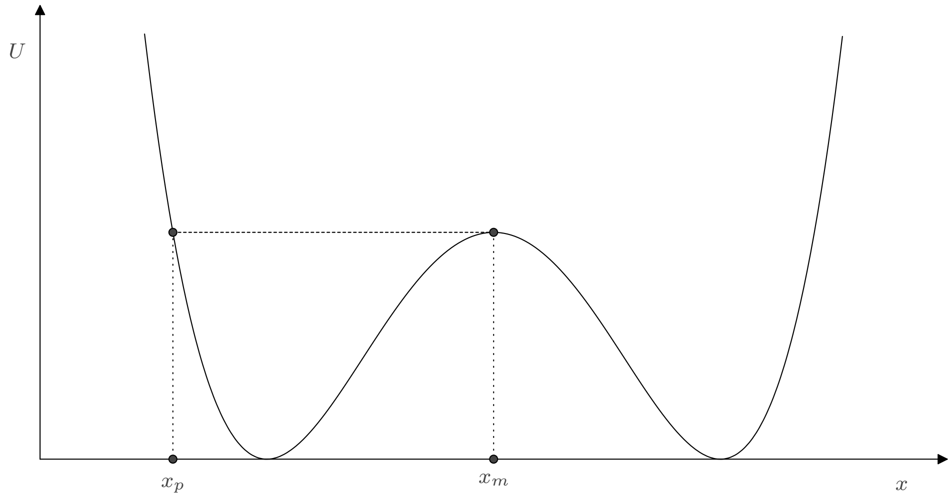
53. Sia $f(x) : [0, 1] \to [0, 1]$ una funzione integrabile tale che

$$f(x) \leq \int_0^x \sqrt{f(t)}dt$$

Dimostrare che $f(x) \leq x^2 \ \forall x \in [0, 1]$.

1.2 Fisica

1. Una particella si muove su una retta. La curva di potenziale $U(x)$ è data.



   - Quale è la condizione iniziale necessaria affinchè la particella possa partire da $x < x_m$ e arrivare a $x > x_m$?
   - Dimostra che se la particella parte ferma in x_1 e arriva in x_2 e ivi ha velocità nulla, allora il tempo impiegato per andare da x_1 a x_2 è lo stesso che impiegherà per tornare a x_1 partendo da ferma in x_2.
   - Detto $T(x)$ il tempo impiegato dalla particella posta ferma in x per fermarsi nuovamente, dimostra che $\lim_{x \to x_p^+} T(x) = \infty$

2. Si consideri una bilancia a torsione formata da due metà unite al perno di torsione. Queste due metà hanno caratteristiche fisiche identiche (massa e sua distribuzione, forma, etc.) tranne che per il fatto che una delle due è riflettente mentre l'altra è assorbente. Si effettua in laboratorio un esperimento e si bombarda la bilancia con una radiazione elettromagnetica diretta ortogonalmente alla bilancia e al suo asse di rotazione. Predire cosa succede. Ora si consideri lo stesso esperimento. Nella realtà accade che si osservi un risultato opposto a quanto appena predetto, dovuto ad un errore sistematico, cercare di trovare le cause di tale errore. (Siccome ho detto la parola "fotone" mi hanno chiesto anche un po' di storia della fisica a riguardo)

3. Si considerino due conduttori sferici di raggi r ed R, a una distanza d molto maggiore dei due raggi, legati da un filo, anch'esso conduttore, molto lungo e sottile. Su uno dei due viene posta una carica Q, cosa succede?

4. Scrivere l'equazione d'onda associata a una particella di quantità di moto nota vincolata a muoversi su una retta. Come cambia l'equazione nel caso in cui la particella sia vincolata su una circonferenza di raggio R? Cosa accade alla quantità di moto? E al principio di indeterminazione di Heisenberg?

5. Caratterizzare la densità a livello atomico.

6. Spiegare il fenomeno della riflessione totale. Considerare ora la riflessione totale in un prisma, cosa accade se avvicino la superficie di un altro prisma alla superficie di riflessione del primo? (In particolare, fare considerazioni sulla distanza fra le due superfici e sull'effetto tunnel delle radiazioni).

7. Dato un certo materiale roccioso, stimare il raggio massimo che può avere un pianeta fatto di quel materiale.

8. Si consideri una sbarra di dimensioni note vincolata in un punto sopra il pelo dell'acqua, a distanza h dalla superficie di quest'ultima. Calcolare la posizione di equilibrio. È stabile o instabile?

9. Calcolare i gradi di libertà di un gas monoatomico e di un gas biatomico. Cosa accade ai gradi di libertà di un gas biatomico aumentando la temperatura? E se viene superata una certa temperatura critica? Fare le stesse considerazioni nel caso di gas monoatomico.

10. Si consideri un cono di momento di inerzia I, raggio di base r e altezza h sul piano, vincolato a ruotare intorno al proprio asse. Sulla parete laterale del cono è incisa una scanalatura che spiraleggia dalla cima al fondo, su cui è vincolata un corpo puntiforme di massa m, che parte dalla cima con velocità iniziale nulla. Assumendo la direzione di uscita della pallina tangenziale e trascurando ogni attrito, calcolare lo stato finale.

11. Dati due corpi di capacità termica C_1 e C_2 e a temperatura rispettivamente T_1 e T_2, calcolare il massimo lavoro estraibile dal sistema.

12. Si consideri una pallina di massa m legata tramite un filo lungo l ad un perno su un piano orizzontale senza attrito. Inizialmente la pallina ruova con velocità tangenziale v_0. Qual'è la tensione sul filo? Se viene inserito un secondo perno ad una distanza dal primo $l_0 < l$, cosa succede al moto della pallina? Qual'è la nuova tensione sul filo? Supponendo che il filo possa

esercitare una tensione T_{max} prima di spezzarsi, è possibile misurare T_{max} cambiando la posizione del secondo perno?

13. Si considerino due sbarre di materiale conduttore parallele poste in verticale. Le due sbarre sono collegate da una resistenza R e da una sbarra conduttrice orizzontale libera di scorrere parallela al terreno. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme B perpendicolare a tutte e tre le sbarre. La sbarra orizzontale viene lasciata libera di cadere per effetto della gravità. Cosa succede al sistema? (NB: non viene richiesto di risolvere l'equazione differenziale)

14. Sia dato un elettrone nel piano. Come devo piazzare due cariche nel piano affinchè si abbiano posizioni di equilibrio? E nello spazio? E se la distribuzione di carica che posso piazzare è continua? Esistono posizioni di equilibrio stabile nel campo elettrico?

15. Modellizzare lo spessore del ghiaccio che si forma in funzione del tempo sulla superficie di un lago quando la temperatura esterna (assunta costante) è minore di $273K$. E se volessi avere un feedback sperimentale del mio modello? Eseguire il fit del grafico ottenuto dai dati sperimentali.

16. Dato un certo ciclo termodinamico (la cui rappresentazione nel piano $p-V$ è un triangolo rettangolo con cateti paralleli agli assi), calcolare il rendimento descrivendo i calcoli. Quali ipotesi intervengono? Qual è il modello più corretto? Se comprimo con una isoterma un gas reale che cosa succede? Cosa succede se nel triangolo iniziale il cateto verticale lo si inclina con pendenza negativa?

17. Si consideri un cilindro di densità ρ uniforme su un piano inclinato. L'equilibrio statico è possibile? Perchè?

18. Come varia il calore specifico molare dei gas al variare della temperatura, in particolare per alte temperature?

19. Si consideri una particella di massa nota, che si vuole rivelare tramite l'urto con una seconda particella. Come si devono scegliere la massa e la velocità di quest'ultima per massimizzare la possibilità di "vedere" la prima particella?

20. Si consideri un tubo a forma di mezzo toro posto verticalmente in modo che le due basi poggino su un piano orizzontale. All'interno vi è un setto mobile posto a metà. Nei due scompartimenti è presente la stessa quantità dello stesso gas alla stessa temperatura. Studiare la stabilità del setto in funzione della temperatura.

21. Si consideri un filo di raggio non trascurabile a percorso da una corrente uniforme: calcolare il campo magnetico in ogni punto dello spazio. Ora dal filo viene tolto un cilindro di materiale, non coassiale ma con asse parallelo a quello del filo originale, in modo che lì non scorra corrente: calcolare il campo magnetico all'interno del cilindro vuoto. Che apparato potremmo costruire affinchè le predizioni fatte circa il campo magnetico all'esterno del filo di spessore trascurabile siano *esatte* in un esperimento *reale*?

22. Un carrello vuoto procede su una rotaia rettilinea ideale (senza attriti), ad un certo punto comincia a piovere e il carrello si riempie (con una legge lineare) d'acqua: Come varia la sua velocità?

23. Dato un circuito di capacitori (e le rispettive capacità di ogni condensatore) finito e complicato a piacere con due capi liberi; calcolare la capacità equivalente.

24. È possibile disporre n masse in punti fissati nello spazio in modo tale che esista un punto di equilibrio stabile (rispetto alla forza gravitazionale). Considerazioni sul potenziale, sul teorema dei gusci sferici. Parallelo tra quest'ultimo e la legge di Gauss. È dato che vi sono alcuni punti (non necessariamente fermi) di equilibrio stabile in un sistema di corpi celesti orbitanti. Perché questo non è in contraddizione con quanto affermato prima? Considerazioni sulle forze apparenti.

25. Una particella puntiforme di carica q si trova nelle vicinanze di un piano infinito. La particella ha inizialmente velocità $\vec{v}$ parallela al piano e tutto il sistema è immerso in un campo magnetico $\vec{B}$ perpendicolare sia a $\vec{v}$ che al piano. Studiare, al variare dei dati forniti, e della distanza d iniziale tra la particella ed il piano, il moto della particella, supponendo che tutti gli urti siano perfettamente elastici.

26. Un filo percorso da corrente passa per il centro di una spira circolare percorsa da corrente; il filo è perpendicolare al piano su cui giace la spira. Quanto vale il momento torcente agente sulla spira? E se la spira si ammacca lievemente in un punto?

27. Si consideri una massa m su un piano incinato liscio (*privo di attrito*) di massa M con superficie inclinata di un angolo θ rispetto all'orizzontale e appoggiato su un piano scabro (*non liscio, cioè con attrito*) orizzontale. Qual'è il minimo coefficiente di attrito piano inclinato-piano orizzontale affinchè cadendo la pallina il piano inclinato resti fermo?

28. Si consideri un punto materiale di massa m che scorre sulla superficie di un cilindro liscio di raggio R con asse orizzontale in un campo gravitazionale. Si supponga che tale cilindro sia fermo. Sapendo che il punto materiale parte dalla cima del cilindro con velocità $v \approx 0$, a che angolo si stacca dalla superficie? Qual'è la sua velocità in quel punto? Come prosegue la sua traiettoria?

29. Onde elettromagnetiche:

    - Come posso generare un'onda elettromagnetica con una carica?
    - Come sono fatte le onde elettromagnetiche generate da una distribuzione sferica uniforme di carica che pulsa (con simmetria sferica)? (dimostra il risultato)
    - Si dimostri il precedente usando prima il teorema di Gauss per il campo elettrico, poi quello per il campo magnetico.
    - Per quale altra interazione fondamentale vale una formula simile al teorema di Gauss? Perchè?
    - Alla luce di quanto detto, una massa sferica pulsante genera onde gravitazionali?

30. Dato un numero molto grande di cariche elettriche tutte uguali che possiamo supporre puntiformi, esse vengono tenute ferme a formare una sfera di densità omogenea e poi improvvisamente lasciate libere di muoversi. Si descriva qualitativamente cosa succede e si trovino i valori a cui tendono con tempo che tende a infinito l'accelerazione e la velocità di una pallina che inizialmente era sul bordo della sfera. Si trovi una equazione differenziale per descrivere il moto di una pallina che all'inizio si trova a distanza generica dal centro e si utilizzi infine questo risultato per mostrare che la simmetria sferica resta e che la densità rimane uniforme.

31. È dato un parallelepipedo metallico con gli spigoli paralleli agli assi cartesiani; la dimensione lungo l'asse z è molto minore delle altre due. Le due facce perpendicolari all'asse x sono collegate ad un generatore, in modo che il parallelepipedo sia attraversato da una corrente parallela all'asse x distribuita uniformemente. Vi è inoltre un campo magnetico uniforme parallelo all'asse z. Dire se vi è una differenza di potenziale fra le due facce perpendicolari all'asse y e calcolarla in funzione di parametri a piacere. Sarebbe possibile, con questa strumentazione, determinare se i portatori di carica (gli elettroni) hanno carica positiva o negativa?

1.3 Informatica

1. Varie domande su automi a stati finiti che riconoscono stringhe di a e b con particolari proprietà (es: almeno due a, non due a consecutive). Scrivere una funzione ricorsiva che calcoli il numero di tali stringhe a partire dall'automa.

2 Domande per chimici e biologi

2.1 Matematica

1. Se in media una persona che pesa 80 kg è alta 1.80 m, quanto ci si può aspettare che sia alto un bambino che pesa 40 kg?

2. Qual è il numero minimo di quadrati di lato 1 sufficiente a coprire completamente un cerchio di raggio 1? E a coprire un segmento di lunghezza 1000? E a coprire un rettangolo di base 1000 e altezza $\frac{1}{100}$?

3. Dati due poligoni A e B con A convesso, dimostrare che se A è contenuto in B allora il perimetro di A è minore del perimetro di B.

2.2 Biologia

1. Un neurone contrae una sinapsi con un secondo neurone. Quando il neurone presinaptico viene eccitato con una corrente corrente elettrica, il grafico che mette in relazione la corrente fornita e il potenziale di membrana del neurone postsinaptico assume la forma di una sigmoide senza che si superi mai il valore soglia per la generazione di un potenziale d'azione. Motivare questa osservazione.

2. In una cellula si osserva la presenza di due isoforme di una proteina, a una di esse mancano 150 amminoacidi nella porzione N-terminale. Fare ipotesi riguardo la possibile origine della proteina più piccola e proporre dei metodi per verificare queste ipotesi.

3. Analizzare i vantaggi delle proteine che presentano un alto tasso di traduzione e un'emivita molto breve.

4. Disegnare alla lavagna la struttura di un gene eucariota e descriverne le parti e le caratteristiche.

5. Data una sequenza di DNA di qualche decina di bp, della quale non si sa nulla a parte la sequenza stessa, è possibile stabilire se sia o meno codificante? Quali caratteristiche della sequenza potrebbero eventualmente consentirci di rispondere a questa domanda? La presenza di un ORF (Open Reading Frame, cornice di lettura che si apre con un ATG e si chiude con un codone di stop dopo una serie di triplette nucleotidiche) tutto compreso all'interno della sequenza data, può essere un dato a favore del fatto che essa sia codificante? E lo sarebbe se la sequenza fosse lunga migliaia di bp?
Se invece non fossero evidenziabili ORF associati alla sequenza data, sarebbe

ragionevole pensare che essa possa essere codificante?
Supponendo di conoscere l'organismo da cui proviene la sequenza, e supponendo che sia ignota la sequenza del suo genoma completo, come è possibile sfruttare una banca dati (ad esempio una piattaforma elettronica come Ensembl) per determinare se la sequenza in esame sia codificante o meno? Che tipo di corrispondenza mi posso aspettare di osservare con sequenze omologhe di organismi affini, se la sequenza in esame è codificante? Che tipo di pattern (in merito alla conservazione delle singole basi nelle varie sequenze omologhe dei vari organismi) si potrebbe riscontrare se la sequenza in esame fosse codificante?

6. Data una sequenza qualsiasi di DNA, quanti sono i possibili ORF che essa può generare?

7. Quante basi dovrebbe essere lunga, indicativamente, la sequenza di un rna codificante per una generica proteina?

8. Descrivere una procedura sperimentale che consenta di mettere in evidenza un'eventuale attività di sintesi proteica all'interno di una sinapsi (come ad esempio la sintesi di proteine collegate alla produzione di neurotrasmettitori).

9. La possibilità di sfruttare particolari canali ionici fotosensibili per influenzare, attraverso stimoli luminosi, il potenziale di membrana di un neurone, rappresenta una delle nuove frontiere negli studi sull'attività neuronale. Spiegare quali sono le prospettive e i vantaggi offerti da questa tecnica innovativa.

10. Quale nota condizione neurologica cronica è contraddistinta da una iperattività elettrica di gruppi di neuroni?

2.3 Chimica per biologi

1. Parlare dell'elettrodo a idrogeno. Per quali condizioni di temperatura e concentrazione è definito? A cosa serve?

2. Tra i due filamenti di DNA che costituiscono una doppia elica sono presenti legami a idrogeno (tra le due basi complementari di ogni coppia). Come si potrebbe fare per convertire uno di questi ponti a idrogeno in un legame covalente? È un evento che può accadere in natura?

3. Si consideri una soluzione acquosa di DNA a doppio filamento. Dal punto di vista del DNA la configurazione a due filamenti appaiati ha (evidentemente) più bassa entropia rispetto ad un'eventuale configurazione "denaturata", con

tutti i filamenti separati in soluzione. Questo sembrerebbe apparentemente in contrasto col fatto che il DNA rimane a doppio filamento in soluzione acquosa, e quindi la soluzione non sembrerebbe tendere al suo stato di massima entropia. Trascurando eventuali contributi entalpici spiegare, facendo riferimento esclusivamente all'entropia delle varie componenti della soluzione, come in realtà il secondo principio della termodinamica sia pienamente rispettato dalla situazione in esame. (Aiuto: l'entropia del DNA è maggiore se esso è denaturato rispetto a quando i due filamenti sono appaiati, ma l'entropia del SOLVENTE in cui esso è sciolto come cambia in rapporto all'appaiamento o meno dei filamenti?)

4. Le molecole biologiche chirali sono presenti nei sistemi viventi esclusivamente in uno dei due enantiomeri (ad esempio gli amminoacidi sono tutti della serie L), e moltissime reazioni biochimiche sono catalizzate da enzimi stereoselettivi. Formulare un'ipotesi su come, partendo da bacini ancestrali di sostanze organiche originariamente presenti in proporzione racemica (come poteva essere un brodo primordiale di amminoacidi formatisi per reazioni abiotiche di composti quali acqua, ammoniaca, anidride carbonica), nei sistemi viventi sia poi prevalsa una forma enantiomerica rispetto all'altra.

5. Spiegare perché il perossido di idrogeno, se considerato idealmente alla temperatura di 0 K, può essere ritenuto un composto chirale. (hint: si tratta di una molecola lineare o no?) Anche il difenile, nelle stesse condizioni ideali di temperatura, può essere considerato chirale? (hint: pensare a una proiezione di Newman del difenile).