Algebra – Problemi di ammissione

A1. Dimostrare che per qualunque terna di reali positivi x, y, z tali che $xy + yz + zx = 3$, si ha

$$x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)+2\sqrt{xyz}(\sqrt{x^3+3x}+\sqrt{y^3+3y}+\sqrt{z^3+3z}) \geq 2xyz(x^2+y^2+z^2+6).$$

A2. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tali che valgano tutte le condizioni seguenti, per ogni scelta di x e y:

$$\begin{aligned} i.&\quad f(x^2) + 2xf(x) = f(x)^2 \\ ii.&\quad f(x-1) = f(-x) \\ iii.&\quad 1 < x < y \Longrightarrow f(x) < f(y). \end{aligned}$$

A3. Dati due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, A e B, sia $A + B$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ i cui elementi sono somma di un elemento di A e un elemento di B:

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

- Dire se esiste una partizione di $\mathbb{Z}$ in tre insiemi non vuoti X, Y, Z, tali che $X+Y$, $Y + Z$ e $Z + X$ siano a due a due disgiunti.
- Ripetere con $\mathbb{Q}$ al posto di $\mathbb{Z}$.