

Allenamenti EGMO 2017 – 2

Esercizio 1. Siano a, b reali positivi tali che $a + b = 1$. Dimostrare che

$$\left(a + \frac{2}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{2}{b}\right)^2 \geq \frac{81}{2}.$$

Esercizio 2. Abbiamo un grafo completo di n vertici, cioè ci sono n vertici e c'è un arco che congiunge ogni coppia di vertici. Vogliamo colorare tutti gli archi e tutti i vertici in modo che:

- due archi che toccano lo stesso vertice siano sempre di colori diversi;
- ogni vertice abbia colore diverso da ognuno degli archi che passano per quel vertice.

Qual è, in funzione di n , il minimo numero di colori necessario per eseguire una colorazione di questo tipo?

Esercizio 3. Sia ABC un triangolo scaleno, sia L il piede della bisettrice di \widehat{BAC} e sia K il piede della bisettrice di \widehat{ABC} . L'asse di BK interseca la retta AL in un punto M . Sia N un punto sulla retta BK tale che LN è parallelo a MK . Dimostrare che $LN = NA$.

Esercizio 4. Determinare tutte le coppie (p, q) di numeri primi tali che $p^3 - q^5 = (p + q)^2$.