

## Allenamenti EGMO 2017 – 2

**Esercizio 1.** Siano  $a, b$  reali positivi tali che  $a + b = 1$ . Dimostrare che

$$\left(a + \frac{2}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{2}{b}\right)^2 \geq \frac{81}{2}.$$

**Esercizio 2.** Abbiamo un grafo completo di  $n$  vertici, cioè ci sono  $n$  vertici e c'è un arco che congiunge ogni coppia di vertici. Vogliamo colorare tutti gli archi e tutti i vertici in modo che:

- due archi che toccano lo stesso vertice siano sempre di colori diversi;
- ogni vertice abbia colore diverso da ognuno degli archi che passano per quel vertice.

Qual è, in funzione di  $n$ , il minimo numero di colori necessario per eseguire una colorazione di questo tipo?

**Esercizio 3.** Sia  $ABC$  un triangolo scaleno, sia  $L$  il piede della bisettrice di  $\widehat{BAC}$  e sia  $K$  il piede della bisettrice di  $\widehat{ABC}$ . L'asse di  $BK$  interseca la retta  $AL$  in un punto  $M$ . Sia  $N$  un punto sulla retta  $BK$  tale che  $LN$  è parallelo a  $MK$ . Dimostrare che  $LN = NA$ .

**Esercizio 4.** Determinare tutte le coppie  $(p, q)$  di numeri primi tali che  $p^3 - q^5 = (p + q)^2$ .