Allenamenti EGMO 2016 – 6

Esercizio 1. Dimostrare che per ogni $x, y, z \geq 0$ vale $x^3y+y^3z+z^3x \geq x^2yz+y^2zx+z^2xy$.

Esercizio 2. Su una lavagna sono scritti n numeri, tutti uguali a 1. Una mossa consiste nello scegliere due dei numeri scritti sulla lavagna, e sostituirli con la loro somma divisa per 4 (cioè sostituisco a e b con $(a+b)/4$). Alla fine rimane un solo numero sulla lavagna. Dimostrare che tale numero è maggiore o uguale a $1/n$.

Esercizio 3. Sia Γ una circonferenza e sia ω una circonferenza tangente internamente a Γ in A. Una tangente a ω da un punto P su Γ tange ω in B. Dimostrare che il rapporto PA/PB è costante al variare di P su Γ.

Esercizio 4. Sia f una funzione dagli interi positivi in se stessi tale che:

- $f(n) \leq f(n+1)$ per ogni n intero positivo;
- $\mathrm{MCD}(f(n), f(m)) = 1$ per ogni coppia di interi n, m positivi distinti;
- f non è identicamente 1.

Mostrare che per n sufficientemente grande:

a) $f(n) \geq n$;

b) $f(n) \geq 2n$;

c) $f(n) \geq 4n$.