

Allenamenti EGMO 2016 – 5

Esercizio 1. Consideriamo la successione definita da $x_1 = 2$ e $x_{n+1} = 1 + \prod_{k=1}^n x_k$. Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} < 1.$$

Esercizio 2. Un insieme non vuoto A si dice n -buono se $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ e $|A| \leq \min A$. Sia a_n il numero di insiemi n -buoni. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ vale la formula $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 1$.

Esercizio 3. Sia ABC un triangolo e sia D un punto interno ad esso. Dimostrare che esiste un altro punto E interno al triangolo ABC tale che $\angle EAB = \angle DAC$, $\angle EBC = \angle DBA$, $\angle ECA = \angle DCB$, che viene detto *coniugato isogonale* di D in ABC .

Sia infine Q il punto medio del segmento DE . Dimostrare che le proiezioni di D ed E sui lati di ABC appartengono ad una circonferenza centrata in Q .

Esercizio 4. Trovare tutti gli n tali che esiste una permutazione σ di $\{1, \dots, n\}$ tale che

$$\sqrt{\sigma(1) + \sqrt{\sigma(2) + \sqrt{\dots + \sqrt{\sigma(n-1) + \sqrt{\sigma(n)}}}}}$$

è razionale.