

Allenamenti EGMO 2016 – 4

Esercizio 1. Sia n intero, con $n > 3$ e siano $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ reali positivi.

1. Dimostrare che

$$1 < \sum_{cyc} \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} < n - 2,$$

dove la somma ciclica è definita come

$$\sum_{cyc} \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} := \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_2 + a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_n + a_1 + a_2}.$$

2. Si mostri che la disuguaglianza è la migliore possibile, cioè che $(1, n - 2)$ è il più piccolo intervallo che contiene tutti i valori della somma precedente al variare di a_1, a_2, \dots, a_n .

Esercizio 2. Sia S un insieme di punti nel piano. Tracciando il maggior numero di segmenti tra due punti, senza però che questi si intersichino tra di loro, si ottengono N triangoli. Dimostrare che N non dipende dalle mosse fatte.

Esercizio 3. Sia ABC un triangolo acutangolo. Gli assi dei lati AB e AC intersecano la mediana da A in W e V rispettivamente. Chiamiamo T l'intersezione fra le rette CV e BW e U l'intersezione fra la retta AVW e la circonferenza circoscritta ad ABC .

(a) Dimostrare che $AT^2 = BT \cdot CT$.

(b) Dimostrare che $AU = BT + CT$.

Esercizio 4. Trovare tutti gli x, y, z, w interi non negativi tali che $x^2 + y^2 = 3(z^2 + w^2)$.