

## Allenamenti EGMO 2016 – 4

**Esercizio 1.** Sia  $n$  intero, con  $n > 3$  e siano  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  reali positivi.

1. Dimostrare che

$$1 < \sum_{cyc} \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} < n - 2,$$

dove la somma ciclica è definita come

$$\sum_{cyc} \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} := \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_2 + a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_n + a_1 + a_2}.$$

2. Si mostri che la disuguaglianza è la migliore possibile, cioè che  $(1, n - 2)$  è il più piccolo intervallo che contiene tutti i valori della somma precedente al variare di  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

**Esercizio 2.** Sia  $S$  un insieme di punti nel piano. Tracciando il maggior numero di segmenti tra due punti, senza però che questi si intersichino tra di loro, si ottengono  $N$  triangoli. Dimostrare che  $N$  non dipende dalle mosse fatte.

**Esercizio 3.** Sia  $ABC$  un triangolo acutangolo. Gli assi dei lati  $AB$  e  $AC$  intersecano la mediana da  $A$  in  $W$  e  $V$  rispettivamente. Chiamiamo  $T$  l'intersezione fra le rette  $CV$  e  $BW$  e  $U$  l'intersezione fra la retta  $AVW$  e la circonferenza circoscritta ad  $ABC$ .

(a) Dimostrare che  $AT^2 = BT \cdot CT$ .

(b) Dimostrare che  $AU = BT + CT$ .

**Esercizio 4.** Trovare tutti gli  $x, y, z, w$  interi non negativi tali che  $x^2 + y^2 = 3(z^2 + w^2)$ .