

Allenamenti EGMO 2016 – 1

Esercizio 1. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f(f(x-y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy$ per ogni x e y reali.

Esercizio 2. Dato un modo di numerare le caselle di una scacchiera $n \times n$ con i numeri da 1 a n^2 , si consideri la massima differenza presente fra i numeri di due caselle “vicine” (dove per vicine s’intende che hanno un lato o un vertice in comune).

Qual è il minimo di tale differenza al variare della numerazione fra le $(n^2)!$ possibili?

Esercizio 3. Sia ABC un triangolo con incentro I . La sua circonferenza inscritta tangente i lati AC e AB rispettivamente in P e Q . Le rette BI e CI intersecano la retta PQ rispettivamente in X e Y .

Dimostrare che i punti X, Y, B, C sono conciclici e identificare il centro della loro circonferenza circoscritta.

Esercizio 4. Trovare le soluzioni intere dell’equazione $n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = k^2$.