

## Allenamenti EGMO 2016 – 1

**Esercizio 1.** Determinare tutte le funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f(f(x-y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy$  per ogni  $x$  e  $y$  reali.

**Esercizio 2.** Dato un modo di numerare le caselle di una scacchiera  $n \times n$  con i numeri da 1 a  $n^2$ , si consideri la massima differenza presente fra i numeri di due caselle “vicine” (dove per vicine s’intende che hanno un lato o un vertice in comune).

Qual è il minimo di tale differenza al variare della numerazione fra le  $(n^2)!$  possibili?

**Esercizio 3.** Sia  $ABC$  un triangolo con incentro  $I$ . La sua circonferenza inscritta tange i lati  $AC$  e  $AB$  rispettivamente in  $P$  e  $Q$ . Le rette  $BI$  e  $CI$  intersecano la retta  $PQ$  rispettivamente in  $X$  e  $Y$ .

Dimostrare che i punti  $X, Y, B, C$  sono conciclici e identificare il centro della loro circonferenza circoscritta.

**Esercizio 4.** Trovare le soluzioni intere dell’equazione  $n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = k^2$ .