Algebra – Problemi di ammissione

A1. Consideriamo il polinomio $g(x) = x^2 - x + 1$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con la proprietà che $f(f(x)) = g(g(x))$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Si determinino tutti i valori possibili per $f(0)$.

A2. Sia $n \geq 1$ e sia $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$. Per ogni sottoinsieme H di A composto da n elementi si ordinino gli elementi di H e del suo complementare,

$$h_1 < h_2 < \cdots < h_n, \qquad k_1 < k_2 < \cdots < k_n$$

con $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ e $A = H \cup \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$. Si dimostri che vale

$$|h_1 - k_n| + |h_2 - k_{n-1}| + \cdots + |h_n - k_1| = n^2$$

A3. Dire se esiste una successione di interi $a_0, a_1, a_2, \ldots$ a due a due primi fra loro e tale che per ogni $n \geq 2$ il polinomio $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sia irriducibile su $\mathbb{Z}[x]$.